

MODELOS PSEUDOESPECTRALES EN PREDICCIÓN NUMÉRICA

METODO VARIACIONAL

Por: Jesús García Rendo y Mariano Hortal.

Introducción.

Un modelo de predicción está bien planteado, si para un conjunto de datos, llamado conjunto inicial (análisis o análisis inicializado), existe exactamente una solución (predicción para el día D) y ésta depende continuamente de aquel conjunto.

Para precisar este concepto, debemos indicar los espacios donde la solución ha de ser obtenida, el espacio de los datos iniciales, así como la noción de dependencia continua entre la solución y el campo inicial.

Los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales encontrados en los problemas meteorológicos no siempre se presentan en los tipos clásicos de elípticos, parabólicos o hiperbólicos. La estima del error y la demostración de la convergencia se presenta muy difícil en estos problemas. Existen lagunas o faltas de coherencia entre la matemática del problema (visto desde los adelantos de los métodos de resolución) y los métodos usuales, ya anticuados, de resolución, pero los recientes avances teóricos introducen nuevos métodos matemáticos y nuevos conceptos. Para vencer esta aparente dificultad y simplificar las técnicas de resolución se introducen los modelos pseudoespectrales.

El material debe organizarse de acuerdo con la naturaleza física del problema, ya que, los sistemas matemáticos adquieren aspectos diversos al considerar en detalle los campos físicos a que afectan.

En la integración numérica de las ecuaciones hidrodinámicas se intenta predecir ciertos campos meteorológicos dependientes del tiempo. La estrategia básica del proceso matemático que se utiliza para este propósito depende profundamente de la manera en la cual estos campos son representados numéricamente. Dos son las alternativas a elegir para este fin: (1) los campos se representan por los valores que las funciones toman sobre una red que cubre el espacio físico y tiempo de pronóstico sobre los que se realiza el problema y finalmente la evolución de los campos se determina por extrapolación en el tiempo de los valores en la red de puntos considerada. (2), los campos se representan por los coeficientes de desarrollo de las funciones en series con respecto a una base densa de funciones regulares conocidas en el espacio de las funciones que definen al campo. La predicción se reduce al cálculo de los coeficientes de desarrollo de los campos.

En el último caso se dice que la representación es el dominio de los coeficientes y se denomina representación pseudoespectral en consideración a pensar en el conjunto de coeficientes del desarrollo como espectro de los campos.

De la representación pseudoespectral distinguiremos dos casos muy importantes según la estructura de las bases de funciones de desarrollo: (a) representación espectral (bases ortogonales), (b) representación en elementos finitos (bases de soporte compacto). Es inmediato que la representación espectral es un desarrollo en el espacio del número de ondas.

En la versión pseudoespectral las ecuaciones de predicción del tiempo pueden definirse en espacios de funciones que son subespacios del espacio de distribuciones de SCHWARTZ, estas funciones cumplen las condiciones de contorno del problema y el sistema en derivadas parciales queda transformado por dualización entre el espacio de funciones y su dual en un sistema diferencial ordinario para los coeficientes del desarrollo de las series que dependerá sólo del tiempo ($\sigma = \text{cte}$) cuando los elementos del dual no dependan de él y en un sistema algebraico no lineal cuando la dualización es completa.

Una elección entre la representación discreta o pseudoespectral y las clases de ésta última depende de varios factores, entre los cuales están (1) la forma de la región de integración (que fuerza la elección de funciones determinadas, por ejemplo, para usar la base de polinomio de Legendre en la representación espectral es necesario que la región de definición del campo sea la esfera, semiesfera y el cuadrante) (2) naturaleza de los campos a representar (que afecta a la eficiencia de la representación, por ejemplo campos con discontinuidades) y (3) la influencia de los errores de truncación. Por errores de truncación se significan los errores introducidos cuando el número de grados de libertad en la formulación matemática exacta del problema es reducido en orden a obtener una formulación aproximada que esté dentro del cálculo numérico práctico.

Un importante aspecto del problema de errores de truncación está relacionado con el hecho de que las ecuaciones hidrodinámicas no son lineales. La no linealidad produce cierta especie de errores de truncación que pueden llevarnos a la inestabilidad de cálculo, pero si el problema es bien formulado en el dominio pseudoespectral, el tipo particular de inestabilidad en cuestión queda automáticamente eliminado. Esta propiedad es una de las principales ventajas de los métodos pseudoespectrales.

Introducción de un campo meteorológico en un espacio HILBERT.

Para introducir las ideas básicas de la representación pseudoespectral (método pseudoespectral) consideramos el sistema de predicción escrito en la forma vectorial siguiente:

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (+ \text{ cond. contorno } + \text{ cond. iniciales adecuadas})$$

definido sobre $\Omega \times R_\sigma \times R_t$; Ω es la región de definición espacial de los campos, R_σ es un intervalo de los números reales y R_t un intervalo real para el tiempo
 sea $\vec{\Sigma} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, donde ξ_i es una variable meteorológica tal como una componente de viento, geopotencial, temperatura, presión, etc.

Si a una ξ_i la llamamos ψ tenemos para cada variable ψ la ecuación correspondiente del sistema (1)

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = F(\psi)$$

donde F depende de ψ y de otras variables en general.

La variable dependiente ψ es una función numérica y está definida sobre $\Omega \times R_\sigma \times R_t$, luego depende del vector de posición $\vec{x} = (x, y, \sigma)$ y del tiempo t . Para un instante t_0 y un valor σ_0 , Ψ depende sólo de $(x, y) \in \Omega$

Entonces, consideramos definidos sobre la región de predicción Ω un conjunto de funciones numéricas que dependen solo de $(x, y) \in \Omega$ y lo dotamos de una estructura de espacio de Hilbert V de producto escalar (\cdot, \cdot) y norma $\| \cdot \|$. Definimos sobre el intervalo $I_\sigma = R_\sigma \times R_t$ un conjunto de funciones \mathcal{F} con valores en el espacio de Hilbert V y tal que si $\sigma_0, t_0 \in I_\sigma$, existe una función $v \in V$ que verifica $v(x, y) = \psi(x, y, \sigma_0, t_0)$. A " \mathcal{F} " le damos estructura hilbertiana y lo representamos por $\mathcal{F}(I_\sigma, V)$ de producto escalar y norma respectivamente.

$$(3) \int_{R_t} \int_{R_\sigma} [(u(\sigma, t) \vee (\sigma, t))] d\sigma dt, \left(\int_{R_t} \int_{R_\sigma} \|u(\sigma, t)\|^2 d\sigma dt \right)^2, u(\sigma, t) \vee (\sigma, t) \in \mathcal{F}(I_\sigma, V)$$

de esta manera se define un espacio de Hilbert $\mathcal{F}(I_\sigma, V)$ asociado a un campo meteorológico sobre el recinto $\Omega \times R_\sigma \times R_t = \Omega \times I_\sigma$

O sea que si $\psi(x, y, \sigma, t)$ es una variable meteorológica definida sobre $\Omega \times I_\sigma$
 $\sigma, t \rightarrow \psi(\sigma, t) = u(x, y) \rightarrow \psi(\sigma, t)(x, y) = \psi(x, y, \sigma, t), \psi \in \mathcal{F}(I_\sigma, V)$

Aproximación de campos meteorológicos en espacios de dimensión finita.

Situados en un espacio de Hilbert separable seleccionamos una base que genere este espacio, y las secciones finitas de esta base generan subespacios cuya unión es densa en el primero. Obtenemos así subespacios vectoriales de dimensión finita (que son prehilbertianos).

Nosotros aproximamos ψ por la función ψ_p perteneciente a uno de estos espacios de Hilbert de dimensión finita, esto es, en función de un conjunto finito de funciones básicas $\omega_p(x, y)$ linealmente independientes:

$$(4) \psi^P(\vec{x}, t) = \sum_p \psi_p^P(\sigma, t) \omega_p(x, y)$$

donde las $\psi_p^P(\sigma, t)$ dependen de σ y t respectivamente pero no de (x, y) .

Para que la aproximación sea buena debe verificarse que el error de truncamiento sea mínimo o lo que es lo mismo que decir: para todo número real $\epsilon > 0$ elegido arbitrariamente, tenemos un número natural P que depende de ϵ tal que

$$(5) \left(\int_{R_t} \int_{R_\sigma} \|\psi - \psi^P\|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

$P =$ cardinal de la base $\{\omega_p\}$ que genera el espacio de dimensión finita aproximante de $\mathcal{F}(I_\sigma, V)$, p es un entero multidimensional (2 - dimensional).

La sección $\{\omega_p\}^P$ genera el subespacio V_p aproximante de V y puede demostrarse que si $\mathcal{F}(I_\sigma)$ es un espacio de funciones numéricas $I_\sigma, \mathcal{F}(I_\sigma) \otimes V_p$ es denso en $\mathcal{F}(I_\sigma, V)$ ($\otimes =$ prod. tensorial). Entonces $\psi^P \in \mathcal{F}(I_\sigma) \otimes V_p \hookrightarrow \mathcal{F}(I_\sigma, V)$

Luego $\psi^P = \sum_p \psi_p^P(\sigma, t) \omega_p(x, y)$ es una representación pseudoespectral para el campo ψ .

Funciones adecuadas para representar variables meteorológicas.

Las funciones que rigen la atmósfera relacionan variables que toman valores acotados (en general) sobre el dominio $\Omega \times R_\sigma \times R_t$ y debemos extender el espacio funcional $\mathcal{F}(I_\sigma, V)$ a aquel cuyas funciones sean de cuadrado integrable y serán más interesantes aquellas que además posean sus derivadas (al menos las primeras) en sentido de las distribuciones de cuadrado integrable.

Estos espacios son densos en el espacio de las distribuciones de SCHWARTZ.

Entonces si $\psi \in \mathcal{F}(I_\sigma, V)$ es de cuadrado integrable pondremos:

$$(6) \quad \int_{R_t} dt \int_{R_\sigma} \int_{\Omega} \psi^2 dx dy < \infty \quad (x, y) \in \Omega$$

si en este tipo de funciones consideramos $v = \psi(\sigma, t) \in V$ se cumple también.

$$(7) \quad \int_{\Omega} v^2 dx dy < \infty$$

Denotemos al espacio de las funciones v definidas sobre Ω que verifican (7) por $L^2(\Omega)$ que es el espacio de las funciones sobre Ω de cuadrado integrable y es un espacio Hilbert para el producto escalar.

$$(8) \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv dx dy \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

Entonces podemos considerar a un campo meteorológico incluido en el espacio de Hilbert $\mathcal{F}(I_\sigma, L^2(\Omega))$ y si exigimos que las funciones que éste verifiquen (6), podemos escribirlo por

$$(9) \quad L^2(I_\sigma, L^2(\Omega)) = \mathcal{F}(I_\sigma, L^2(\Omega))$$

y si exigimos la derivación en \mathcal{F} y derivación en V , escribiremos

$$(10) \quad H(I_\sigma, H^r(\Omega)) = \mathcal{F}(I_\sigma, V)$$

el producto escalar en (9) es

$$(11) \quad (\varphi, \Psi)_{\mathcal{F}} = \int_{R_t} \int_{R_\sigma} (\varphi(t), \Psi(t)) dt d\sigma, \quad \Psi \in L^2(I_\sigma, L^2(\Omega))$$

Si ahora llevamos (4) a (1) y (2) y se dualizan estas ecuaciones (teniendo en cuenta lo expuesto en el último párrafo) resultantes, en el espacio $L^2(\Omega)$ se deducen las ecuaciones de evolución de los coeficientes del desarrollo $\Psi_p^P(t)$ que hacemos utilizando el método de GALERKIN.

$$(12) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi^P}{\partial t} \omega_\alpha d\Omega = \int_{\Omega} F(\Psi^P) \omega_\alpha d\Omega$$

y sustituyendo Ψ^P por (4) en (12) tenemos

$$(13) \quad \sum_p \dot{\Psi}_p^P(\sigma, t) \int_{\Omega} \omega_p(x, y) \omega_\alpha(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} F(\sum_p \Psi_p^P(\sigma, t) \omega_p(x, y)) \omega_\alpha(x, y) d\Omega$$

p y α son enteros bidimensionales

De (13) obtenemos un sistema de P ecuaciones con P incógnitas que será un sistema diferencial ordinario no lineal para una σ determinada. Problema este de solución fácil, aunque no de fácil cálculo en un ordenador.

Este sistema puede simplificarse considerablemente si las funciones básicas $\omega_p(x, y)$ son de soporte compacto u ortogonales (mejor ortonormales).

Nosotros significamos por funciones de soporte compacto aquellas funciones que son distintas de cero sólo en una parte pequeña cerrada del dominio y valen cero fuera de este y por ortogonal las que verifican:

$$(14) \quad \int_{\Omega} \omega_{\rho} \omega_{\alpha} d\Omega = \mathcal{Q} \delta_{\rho\alpha} \quad \delta_{\rho\alpha} = \delta \quad \text{de Kronecker}$$

Entre la representación pseudoespectral, nosotros denominamos método espectral al que emplea funciones del tipo (14) generalmente ortonormales $\mathcal{Q}\delta_{\rho\alpha} = \delta_{\rho\alpha}$ y método de los elementos finitos al que emplea funciones de soporte compacto.

Si Ω es la esfera o parte de ella (x, y) puede ser $(\lambda, \theta) = (\text{Longitud}, \text{Latitud})$.

Cuando Ω es la esfera, semiesfera ó un cuadrante, es interesante hacer uso del método espectral que tiene lugar para bases que verifican (14): y cuando las bases ω_{ρ} son los armónicos esféricos tendremos la representación espectral clásica.

Los armónicos esféricos son de la forma

$$(15) \quad \omega_{\rho}(\lambda, \mu) = P_{\rho}(\mu) e^{im\lambda}, \quad \mu = \text{Sen } \theta$$

donde

$$(16) \quad P_{\rho}(\mu) = \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \cdot \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \cdot \left(\frac{d}{d\mu} \right)^{n+1} (\mu^2-1)^n$$

son los polinomios de Lagrange y $\rho=(m,n)$ un punto de la red plana de abscisas m y ordenadas n .

La base (15) es ortonormal y una variable Ψ^P tiene según esta base la expresión.

$$(17) \quad \Psi^P(\lambda, \mu, \sigma, t) = \sum_{\rho} \Psi_{\rho}^P(\sigma, t) \omega_{\rho}(\lambda, \mu)$$

Ψ^P es la parte truncada de la variable Ψ , $P = \text{card} \{ \omega_{\rho} \}$

Para evitar ondas erróneas los valores de m y n en $\rho=(m,n)$ suelen tomarse en zonas planas apropiadas así que pueden tomarse las ρ en un triángulo, rombo, pentágono u otra figura; de ahí que el truncamiento se denomine, según los casos, triangular, romboidal, pentagonal, etc.