

PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UNA DETERMINADA SECUENCIA DE DIAS HUMEDOS Y SECOS

por Vicente Ibañez Orts y Francisco Elías Castillo
Dres. Ingenieros Agrónomos

Introducción

El exceso o falta de precipitación juega un importante papel en muchas de las actividades humanas. Así, por ejemplo, en ciertas labores agrícolas, ocurre que la presencia o ausencia de lluvia en una época determinada, puede suponer el éxito o el fracaso. Es sabido que la fiabilidad de los pronósticos del tiempo sobre la posibilidad de precipitación disminuye a medida que aumenta el periodo de predicción, si bien a largo plazo, es posible acercarse a la realidad mediante un estudio estadístico de las lluvias caídas en el pasado; ello es de gran utilidad en la estrategia de planificación de cultivos.

Este artículo es un intento de describir las secuencias de días húmedos y secos en la comarca arrocerá de Sueca (Valencia), donde pueden presentarse dificultades para la recolección del arroz al coincidir con las borrascas y aguaceros de los últimos días de septiembre y primeros de octubre. El estudio se basa en las precipitaciones diarias registradas durante el periodo de 30 años comprendido entre 1949 y 1978. Al final del artículo

se dan unos listados de ordenador para calcular la probabilidad de una determinada secuencia de días húmedos o secos en los meses de agosto, septiembre y octubre. Un día se considera húmedo si la precipitación registrada es igual o superior a 1mm.

A partir de los datos de los listados, se pueden dar respuestas a las siguientes preguntas:

- A) ¿Cuál es la probabilidad de que un día determinado sea seco o húmedo?
- B) ¿Cuál es la probabilidad de que una determinada secuencia de días húmedos y/o secos se dé en un periodo de tiempo concreto?
- C) ¿Cuál es la probabilidad de un determinado número de días secos o húmedos en un periodo de tiempo prefijado?

El modelo de cadena de Markov supone que existe persistencia, es decir, que dado un día seco, la probabilidad de que el día siguiente sea seco es mayor que la que se obtiene si el primer día llueve. La probabilidad inicial en toda cadena de Markov se conoce como

(*) En este artículo se ha seguido la metodología propuesta por los siguientes autores: GABRIEL y NEUMANN (1962), CASKEY (1963), WEISS (1964) y HEERMANN et al (1971).

probabilidad *absoluta*. La probabilidad absoluta de que el segundo día sea seco (independientemente del primero), se encuentra comprendida entre la probabilidad de que el segundo esté seco, suponiendo que el día primero esté húmedo, y la probabilidad de que estando el primer día seco también lo esté el segundo. Estas dos últimas probabilidades condicionales reciben el nombre de probabilidades *de transición*. Las diferencias entre las probabilidades de transición entre sí, y de éstas respecto a la absoluta, reflejan la persistencia del modelo de precipitación.

El modelo de probabilidad de las cadenas de Markov

En 1962 GABRIEL y NEUMANN al estudiar las secuencias de días de lluvia ocurridas en Tel Aviv durante 27 años, encontraron que podían describirse bien mediante un modelo de probabilidad de cadena de Markov de primer orden. No se trataba de una explicación física de la ocurrencia de precipitación, sino de una aproximación estadística al fenómeno.

El modelo asume que la probabilidad de un día de lluvia depende únicamente de las condiciones del día precedente. La cantidad de precipitación sólo se refleja en la definición previa de ocurrencia o no de lluvia. Este modelo de probabilidad es una cadena de Markov cuyos parámetros son las dos probabilidades condicionales P_0 y $(1 - P_1)$, donde P_0 es la probabilidad de un día húmedo, si el día anterior fue seco, y $(1 - P_1)$ es la probabilidad de un día seco, si el día anterior fue húmedo. Por consiguiente:

$$P_1 = P(H/H) \qquad (1 - P_1) = P(S/H)$$

$$P_0 = P(H/S) \qquad (1 - P_0) = P(S/S)$$

donde H y S son las abreviaturas de día húmedo y seco.

Un intervalo seco de longitud n se define como una secuencia de n días secos precedidos y seguidos por días húmedos.

La probabilidad de un intervalo seco de longitud n días del tipo SSS SH, suponiendo que las probabilidades relativas no varían en el intervalo considerado, es:

$$P_0(1 - P_0)^{n-1}$$

y la probabilidad de un intervalo húmedo de longitud n será:

$$(1 - P_1) P_1^{n-1}$$

La probabilidad acumulada de que existan hasta n días secos en un cierto intervalo, es:

$$\sum_{i=1}^n P_0(1 - P_0)^{i-1} = \frac{P_0[(1 - P_0)^n - 1]}{-P_0} = 1 - (1 - P_0)^n$$

ya que se trata de una progresión geométrica de razón $1 - P_0$.

Lo mismo se puede obtener para secuencias húmedas de hasta n días consecutivos:

$$1 - P_1^n$$

La probabilidad de una secuencia seca mayor que n , dado que es el complemento de la anterior, será:

$$(1 - P_0)^n$$

y la probabilidad de secuencias húmedas mayores que n : P_1^n .

Aplicación y ejemplos

Para la estación de Sueca (Valencia) se han confeccionado las Tablas que se incluyen al final de este artículo utilizando los datos de lluvia diarios durante un período de 30 años (agosto, septiembre y octubre). Estas tablas dan la siguiente información:

- A) Fijado el nivel de precipitación (1 mm), se muestra para los días del mes, aquellos en los que ha ocurrido o no precipitación (Ocurrencia = i; no ocurrencia = 0).
- B) Seguidamente se da el total de días secos y húmedos (SECO; HUMD), que se han presentado en las fechas de cada mes, para los treinta años estudiados.
- C) A continuación se da la probabilidad absoluta para el carácter seco o húmedo de un día X determinado (PSEC y PHUM), que se calcula como el número de años en los cuales el día X está seco o húmedo, dividido por el número total de años (30).
- D) Después se da la probabilidad de transición de que el día de hoy (X_i) esté seco si el día anterior (X_{i-1}) fue también seco. Se calcula como el número de años en los cuales el día X_i y el día X_{i-1} están secos, divididos por el número de años en los que el día X_{i-1} está seco, variando el índice i entre 1 y 91, ya que los meses de agosto y octubre tienen 31 día y septiembre 30.

Análogamente se han calculado las tres probabilidades de transición restantes. Probabilidad de que un día sea húmedo si el anterior fue seco $P(H/S)$, probabilidad de que ambos días sean húmedos $P(H/H)$, y la probabilidad de que el día de hoy esté seco cuando el anterior fue húmedo $P(S/H)$.

En realidad basta con determinar solamente la probabilidad absoluta de que un día esté seco (PSEC), y la probabilidad de transición de un día seco al siguiente $P(S/S)$, ya que a partir de estas dos probabilidades se pueden calcular las restantes aplicando las fórmulas siguientes:

$$P(H_i) = 1 - P(S_i)$$

$$P(H_i/S_{i-1}) = 1 - P(S_i/S_{i-1})$$

$$P(S_i/H_{i-1}) = \frac{P(S_i) - P(S_{i-1}) \cdot P(S_i/S_{i-1})}{P(H_{i-1})}$$

$$P(H_i/H_{i-1}) = 1 - P(S_i/H_{i-1})$$

Ejemplo de aplicación

Si se está interesado solamente en calcular la probabilidad de que un día determinado sea húmedo o seco, basta simplemente con leer en los listados el valor de la probabilidad absoluta que corresponde a la fecha que se busca.

Para calcular la probabilidad de una determinada secuencia de días húmedos y secos, al primer día de la secuencia se le asocia la probabilidad absoluta, y a los restantes, las de transición. Esto se cumple por muy larga que sea la secuencia.

Por ejemplo: ¿Qué probabilidad existe de que del día 13 al 15 de septiembre, en la estación de Sueca, la secuencia sea SHS (seco-húmedo-seco)? (se considera día de lluvia si la precipitación es mayor o igual a 1 mm). En los listados buscamos las siguientes probabilidades.

SUECA-ESTACION ARROCERA (1 mm).
Mes de septiembre.

$$P(S_{13}) = 0,83$$

$$P(H_{14}/S_{13}) = 0,04$$

$$P(S_{15}/H_{14}) = 0,33$$

por lo tanto

$$P_{SHS} = P(S_{13}) \times P(H_{14}/S_{13}) \times P(S_{15}/H_{14})$$

$$= 0,83 \times 0,04 \times 0,33 = 0,01$$

y la probabilidad encontrada de que ocurra la secuencia SHS es del 1 por ciento.

También se podría calcular el número de días húmedos que pueden producirse en el periodo estudiado de tres días. En este caso la

pregunta se formularía del modo siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de que exista al menos un día húmedo en el periodo que abarca del 13 al 15 de septiembre?. Para ello se recurre a la *Tabla* que nos da la lista de las posibles secuencias de días húmedos y secos para un periodo de longitud $n = 2, 3, 4$ y 5 días (permutaciones con repetición). La probabilidad de obtener 0, 1, 2 ó 3 días húmedos es la siguiente:

$$P(0 \text{ días húmedos}) = P_{SSS} = 0,83 \times 0,06 \times 0,85 = 0,677$$

$$P(1 \text{ días húmedos}) = P_{HSS} + P_{SHS} + P_{SSH} = 0,09 + 0,01 + 0,12 = 0,217$$

$$P(2 \text{ días húmedos}) = P_{SHH} + P_{HSH} + P_{HHS} = 0,02 + 0,02 + 0,02 = 0,060$$

$$P(3 \text{ días húmedos}) = P_{HHH} = 0,17 \times 0,40 \times 0,67 = 0,046$$

Suma 1,00

La suma de probabilidades para todas las posibles secuencias deberá lógicamente ser igual a 1,00 (dentro del error de redondeo) La respuesta a la pregunta sería la suma de las tres probabilidades de que exista 1, 2 ó 3 días húmedos, o bien el complemento a 1 de ningún día húmedo ($1 - 0,677 = 0,323$). Por tanto, la probabilidad buscada es del 32,3 por ciento.

Como un nuevo ejemplo de mayor aplicación práctica se propone el siguiente. La cosecha de arroz se suele recolectar en Levante entre el 15 de septiembre y el 5 de

octubre. Las lluvias durante ese periodo producen graves trastornos ya que impiden que las máquinas cosechadoras trabajen, y si las precipitaciones son muy intensas, los daños pueden ser cuantiosos. Nos proponemos calcular a partir del 1 de septiembre, y de 5 en 5 días, para la estación de Sueca y los niveles de precipitación de 2,5 y 25 mm, cuál es la probabilidad de que haya 5 días secos consecutivos (*).

Probabilidad de 5 días secos consecutivos:
 $P(S) \times P(S/S) \times P(S/S) \times P(S/S) \times P(S/S)$.

Fecha	Nivel de precipitación 2,5 mm	Nivel de precipitación 25 mm
1 - 5 sept.	$0,93 \times 0,89 \times 0,93 \times 0,81 \times 1,00 = 0,69$	$0,97 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 = 0,97$
6 - 10 sept.	$0,97 \times 0,90 \times 0,96 \times 0,86 \times 1,00 = 0,72$	$1,00 \times 1,00 \times 0,97 \times 1,00 \times 1,00 = 0,97$
11-15 sept.	$1,00 \times 0,90 \times 0,89 \times 0,96 \times 0,89 = 0,68$	$1,00 \times 0,93 \times 0,93 \times 1,00 \times 0,97 = 0,84$
16-20 sept.	$0,87 \times 0,92 \times 0,93 \times 0,96 \times 0,89 = 0,64$	$1,00 \times 1,00 \times 0,97 \times 1,00 \times 1,00 = 0,97$
21-25 sept.	$0,87 \times 0,96 \times 0,96 \times 0,86 \times 0,88 = 0,61$	$0,97 \times 1,00 \times 1,00 \times 0,97 \times 1,00 = 0,94$
26-30 sept.	$0,90 \times 0,93 \times 0,86 \times 0,96 \times 0,88 = 0,61$	$1,00 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 = 1,00$
1 - 5 oct.	$0,97 \times 0,90 \times 1,00 \times 0,75 \times 0,77 = 0,50$	$0,97 \times 0,97 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 = 0,94$
6 - 10 oct.	$0,83 \times 0,88 \times 0,96 \times 0,96 \times 0,82 = 0,55$	$0,97 \times 0,97 \times 1,00 \times 1,00 \times 1,00 = 0,94$
11-15 oct.	$0,83 \times 0,88 \times 0,88 \times 0,88 \times 0,85 = 0,48$	$0,93 \times 0,96 \times 0,97 \times 0,93 \times 1,00 = 0,81$
16-20 oct.	$0,80 \times 0,92 \times 0,88 \times 0,92 \times 0,88 = 0,52$	$0,97 \times 0,90 \times 0,93 \times 1,00 \times 0,97 = 0,79$

(*) Se han elaborado también Tablas para los niveles de precipitación de 2,5, 5, 10 y 25 mm que no se incluyen en este artículo.

Se observa que para el nivel de 2,5 mm de precipitación, la probabilidad de tener 5 días secos, que es el complemento a la unidad de que exista al menos algún día con lluvia, disminuye para el mes de septiembre desde aproximadamente 0,70 entre el día 1 y el 20, a 0,60 entre el 20 y el 30, y en octubre desciende hasta un valor paroximado de 0,50.

Si se considera el nivel de precipitación de 25 mm, la probabilidad se sitúa prácticamente alrededor del 0,95 entre el 1 de septiembre y el 10 de octubre, para descender al 0,80 a partir de esa fecha.

Ambos casos reflejan estadísticamente la notable frecuencia de los aguaceros en el mes de octubre por comarcas de Levante.

Los ejemplos son interesantes para planificar las faenas de recolección del arroz aprovechando la secuencia de días secos intercalados entre las épocas de aguaceros.

BIBLIOGRAFIA

Caskey, J.E. Jr. (1963). "A Markov chain model for the probability of precipitation occurrence in intervals of various length". Monthly Weather Review. pp. 298-301.

Gabriel, K.R. & Neumann, J. (1962). "A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel. Aviv". Quaterly Journal of the Royal Meteorological Society. pp. 90-95.

Heermann, D.F., Finkner, M.D. & Hiler, E.A. (1971). "Probability of secuencias of wet and dry days for eleven western states and Texas".

Weiss, L.L. (1964). "Secuencias of wet or dry days described by a Markov chain probability model". Monthly Weather Review. Vol. 92. pp. 169-176.

T A B L A

SECUENCIAS POSIBLES DE DIAS HUMEDOS O SECOS PARA PERIODOS DE LONGITUD

n = 2, 3, 4 y 5 días

Núm. de días húmedos	Secuencias posibles	Núm. de días húmedos	Secuencias posibles
	n = 2		n = 5
0	S,S	0	S,S,S,S,S
1	H,S	1	H,S,S,S,S
	S,H		S,H,S,S,S
2	H,H		S,S,H,S,S
	n = 3		S,S,S,H,S
			S,S,S,S,H
		2	H,H,S,S,S
0	S,S,S		H,S,H,S,S
1	H,S,S		H,S,S,H,S
	S,H,S		H,S,S,S,H
	S,S,H		S,H,H,S,S
2	H,H,S		S,H,S,H,S
	H,S,H		S,H,S,S,H
	S,H,H		S,S,H,H,S
3	H,H,H		S,S,H,S,H
			S,S,S,H,H
	n = 4	3	H,H,H,S,S
			H,H,S,H,S
0	S,S,S,S		H,H,S,S,H
1	H,S,S,S		H,S,H,H,S
	S,H,S,S		H,S,H,S,H
	S,S,H,S		H,S,S,H,H
	S,S,S,H		S,H,H,H,S
2	H,H,S,S		S,H,H,S,H
	H,S,H,S		S,H,S,H,H
	H,S,S,H		S,S,H,H,H
	S,H,H,S	4	H,H,H,H,S
	S,H,S,H		H,H,H,S,H
	S,S,H,H		H,H,S,H,H
3	H,H,H,S		H,S,H,H,H
	H,H,S,H		S,H,H,H,H
	H,S,H,H	5	H,H,H,H,H
	S,H,H,H		
4	H,H,H,H		

LISTADOS DE ORDENADOR QUE DAN LA PROBABILIDAD ABSOLUTA Y DE TRANSICION DE UN DIA SECO O HUMEDO EN EL OBSERVATORIO DE SUECA (VALENCIA), PARA UN NIVEL DE PRECIPITACION DE 1 mm.

ESTACION DE SUECA (VALENCIA)

RESUMEN DIAS LLUVIA DEL PERIODO: 1949 1978 MES DE SEPTIEMBRE DIA SECO:PP < 1 MM SECO=0/HUMED=1

ANOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	SUM					
1949	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2				
1950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	6				
1951	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3				
1952	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5				
1953	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1				
1954	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2				
1955	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5				
1956	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1				
1957	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5				
1958	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
1959	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	12					
1960	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3				
1961	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5				
1962	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	5				
1963	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7			
1964	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2				
1965	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7			
1966	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5			
1967	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3			
1968	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4			
1969	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5		
1970	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		
1971	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6		
1972	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11		
1973	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	
1974	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
1975	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
1976	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
1977	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
1978	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
SECO	28	25	26	26	26	28	27	28	23	29	28	26	25	27	24	26	25	28	26	26	26	26	27	27	24	27	26	26	23	26	26	26	26	26	785	
HUMD	2	5	4	4	4	2	3	2	7	1	2	4	5	3	6	4	5	2	4	4	4	4	3	3	6	3	4	4	4	7	4	4	4	115		
PSEC	.93	.83	.87	.87	.93	.90	.93	.90	.77	.97	.93	.87	.83	.90	.80	.87	.83	.93	.87	.87	.87	.87	.90	.90	.80	.90	.87	.87	.77	.87	.87	.87	.87	.87		
PHUM	.07	.17	.13	.13	.07	.10	.07	.23	.03	.07	.13	.17	.10	.20	.13	.17	.07	.13	.13	.13	.13	.10	.10	.20	.10	.13	.13	.23	.13	.13	.13	.13	.13			
PS/S	.96	.82	.88	.88	.92	.96	.89	.96	.62	.00	.97	.86	.88	.96	.85	.92	.85	.92	.93	.92	.92	.92	.96	.93	.81	.92	.89	.92	.81	.00	.88	.713	.713			
PH/S	.04	.18	.12	.12	.08	.04	.11	.04	.18	.00	.03	.14	.12	.04	.15	.09	.15	.08	.07	.08	.08	.04	.07	.19	.08	.11	.08	.19	.00	.12	.74	.74	.74			
PH/H	.50	.00	.28	.25	.50	.25	.00	.33	.00	.14	.00	.00	.50	.40	.67	.33	.25	.00	.00	.50	.50	.50	.33	.33	.17	.33	.50	.50	.57	.25	.91	.91	.91			
PS/H	.50	.00	.80	.75	.50	.75	.00	.67	.00	.86	.00	.00	.50	.60	.33	.67	.75	.00	.00	.50	.50	.50	.67	.67	.83	.67	.50	.50	.43	.75	.72	.72	.72			

