ECUACION DE CONTINUIDAD EN COORDENADAS "SIGMA" DE PHILLIPS: DEDUCCION DIRECTA MEDIANTE LA APLICACION DEL JACOBIANO

por Mariano Medina Isabel

En las páginas 58 a 61 de nuestro libro sobre "Teoría de la predicción meteorológica" (INM, Serie B, textos, n.º 20, 1984) se deduce la ecuación de continuidad en coordenas "sigma" de Phillips partiendo de su expresión en coordenadas isobáricas de Sutcliffe y aplicando a ésta el sistema de ecuaciones diferenciales que sirven para pasar de uno a otro de esos dos sistemas de coordenadas. Tal deducción, de indudable valor didáctico, resulta un poco larga y relativamente complicada. Vamos a exponer aquí una deducción directa, más corta y sencilla, mediante aplicación del Jacobiano de transformación de las coordenadas (x, y, z, t) a las (x, y, σ, t).

(Nota: Por no disponer del símbolo adecuado, hemos usado la δ para indicar derivadas paralelas.)

Dicho Jacobiano (pág. 52 del libro citado) es, en general, para pasar del sistema (x, y, z, t) a otro cualquiera (q_1, q_2, q_3, t):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta q_1} & \frac{\delta x}{\delta q_2} & \frac{\delta x}{\delta q_3} \\ \frac{\delta y}{\delta q_1} & \frac{\delta y}{\delta q_2} & \frac{\delta y}{\delta q_3} \\ \frac{\delta z}{\delta q_1} & \frac{\delta z}{\delta q_2} & \frac{\delta z}{\delta q_3} \end{vmatrix}$$

y al hacer $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \sigma$ resulta:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta z}{\delta \sigma} \end{vmatrix} = \frac{\delta z}{\delta \sigma}$$

La ecuación de continuidad en coordenadas generalizadas es la (III,4') del citado libro, es decir:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{J}}{J} + \operatorname{div} V = 0$$

con lo que resulta:

$$J = \frac{\delta z}{\delta \sigma} \; ; \qquad \dot{J} = \frac{d}{dt} \frac{\delta z}{\delta \sigma}$$

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{1}{\frac{\delta z}{\delta \sigma}} \frac{d}{dt} \frac{\delta z}{\delta \sigma} = \frac{d}{dt} l_n \frac{\delta z}{\delta \sigma}$$

que sustituida en la (III,4') nos da:

$$\frac{d}{dt} l_n \rho + \frac{d}{dt} l_n \frac{\delta z}{\delta \sigma} + \operatorname{div} V = 0$$

Como $\operatorname{div} V = \operatorname{div}_\sigma V + \frac{\delta \dot{\sigma}}{\delta \sigma}$ resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(l_n \rho + l_n \frac{\delta z}{\delta \sigma} \right) + \operatorname{div}_\sigma V + \frac{\delta \dot{\sigma}}{\delta \sigma} = 0$$

$$\frac{d}{dt} l_n \left(\rho \frac{\delta z}{\delta \sigma} \right) + \operatorname{div}_\sigma V + \frac{\delta \dot{\sigma}}{\delta \sigma} = 0 \qquad [*]$$

Pero

$$\frac{d}{dt} l_n \left(\rho \frac{\delta z}{\delta \sigma} \right) = \frac{1}{\rho \frac{\delta z}{\delta \sigma}} \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\delta z}{\delta \sigma} \right)$$

y aplicando la ecuación hidrostática

$$\frac{\delta z}{\delta \sigma} = - \frac{1}{\rho g} \frac{\delta p}{\delta \sigma}$$

Por definición, la coordenada σ es:

$\sigma = \frac{p}{p_s}$, siendo p la presión en el nivel de que se trate y p_s la presión en el suelo, siendo p_s independiente de σ, de manera que es:

$$p = p_s\,\sigma;\ dp = p_s\,d\sigma;\ p_s = \frac{\delta p}{\delta\sigma}$$

y queda

$$\frac{\delta z}{\delta\sigma} = -\frac{1}{\rho g}\,p_s$$

con lo que resulta:

$$\frac{d}{dt}\,l_n\left(\rho\,\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right) = -\frac{g}{p_s}\,\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{g}\,p_s\right) = \frac{\dot{p}_s}{p_s}$$

que sustituido en [*] nos da:

$$\frac{\dot{p}_s}{p_s} + \mathrm{div}_\sigma V + \frac{\delta\dot{\sigma}}{\delta\sigma} = 0$$

que es la ecuación buscada y que coincide con la (III.12) de la página 60 del libro a que nos referimos.