

## EL METODO ESPECTRAL PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. SU APLICACION A LA ECUACION BAROTROPICA DE LA VORTICIDAD

*José Antonio García-Moya Zapata.  
Instituto Nacional de Meteorología*

### Abstract

The Spectral Method is shown as one of the better methods to resolve Partial Differential Equation Systems. This is because it improves the numeric solution with respect to analytic solution. Moreover, the numeric solution maintains exactly the integral invariants of the analytic solution. In this paper, it is explained the mathematical underlying principles of the method. At the end, it is applied to the resolution of the Barotropic Vorticity Equation for both local and spheric coordinates.

### Resumen

En la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, el método espectral se ha mostrado como uno de los más eficaces. Esto no sólo es debido a que mejora las soluciones numéricas obtenidas con respecto a la solución analítica, sino también a que la solución numérica conserva exactamente los invariantes integrales de la solución analítica. Se explica en este trabajo detalladamente el fundamento matemático del método. Después, y como aplicación, se resuelve la ecuación barotrópica de la vorticidad tanto en coordenadas locales como esféricas.

### 1. Introducción

Desde los primeros experimentos en predicción numérica del tiempo, a finales de los años cuarenta, los métodos de puntos de rejilla han

sido los más usados en los modelos numéricos del flujo atmosférico a escala planetaria. Sin embargo, se han empezado a usar métodos alternativos. Uno de estos métodos es el espectral.

El método espectral fue introducido en los modelos meteorológicos por Silberman (1954), que estudió la ecuación de la vorticidad para una atmósfera barotrópica en coordenadas esféricas. Estudios posteriores demostraron algunas propiedades importantes del método. El trabajo de Ellsaesser (1966) demostró que para un modelo barotrópico equilibrado el método espectral podría competir, en cuanto a ejecución y eficacia, con el de puntos de rejilla usado por el U.S. National Meteorological Center. Sin embargo, aunque el método espectral funcionaba bien para modelos simples en baja resolución, no se le consideraba como una alternativa real a los métodos de puntos de rejilla para integraciones de modelos no-adiabáticos más complicados. La razón de esto era que el cálculo de los llamados "coeficientes de interacción" provenientes de los términos no lineales de las ecuaciones necesitaba demasiado tiempo de ordenador cuando se quería conservar un número de componentes ondulatorias en los desarrollos en serie, suficientes para obtener una adecuada resolución espacial, que incorporara procesos físicos locales, como por ejemplo, el ajuste convectivo.

La situación cambió completamente con la introducción del método de la transformada, desarrollado independientemente por Eliassen y otros (1970) y Orszag (1970). En este método no están implicados los coeficientes de interacción

y la memoria de ordenador y las operaciones aritméticas requeridas se reducen sustancialmente. Además el método implica un estado en cada paso de tiempo, en el que los valores puntuales de las variables se calculan en una rejilla auxiliar en el espacio físico. Como han señalado Eliassen y otros (1970) ésta hace que se puedan incluir en el modelo los efectos no-adiabáticos locales, de manera similar a lo que se hace en los modelos de puntos de rejilla.

A continuación se describen brevemente algunas generalidades sobre el método espectral y las propiedades más importantes de los armónicos esféricos y, en particular, de los que utilizan las funciones asociadas de Legendre.

Después se aplica el método para resolver la ecuación barotrópica de la vorticidad, tanto en coordenadas locales (tomando como funciones básicas las de Fourier) como en coordenadas esféricas (tomando los armónicos esféricos con las funciones asociadas de Legendre).

## II. Armónicos esféricos. Funciones asociadas de Legendre

Las ecuaciones en predicción numérica del tiempo pueden escribirse, de forma general, como:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} = L_j(F_j) \quad j = 1 \dots J \quad [\text{II.1}]$$

donde  $J$  es el número de variables independientes que aparecen en las ecuaciones y que son función de las tres coordenadas espaciales "x" y del tiempo "t", o sea,  $F_j = F_j(x, t)$ . Para todas las aplicaciones meteorológicas se supone que  $F_j$  es tan continua, o sea, diferenciable, como se necesite.

Los  $L_j$  son operadores, generalmente no lineales, formados por derivadas parciales espaciales y, en algunos casos, integrales espaciales.

Entonces, para cualquier instante de tiempo  $t$ , los campos  $F_j$  son funciones continuas de "x" y,

como tales, pueden ser consideradas como elementos de algún Espacio Vectorial  $H$  (por ejemplo, el de todas las funciones continuamente diferenciables).

Si "f" y "g" son dos funciones de  $H$  podemos definir un producto escalar de la forma:

$$(f, g) = \int_s f \cdot g^* dx$$

donde  $g^*$  es el complejo conjugado de  $g$ . También podemos definir una norma como:

$$||f|| = \left[ \int_s |f|^2 dx \right]^{1/2}$$

Con este producto escalar y esta norma,  $H$  se convierte en un Espacio de Hilbert.

Si suponemos ahora que  $e_m(x)$  es una base ortonormal de  $H$  (o sea,  $(e_m, e_n) = 0$  para  $n \neq m$  y  $(e_n, e_n) = 1$ ) cualquier elemento  $F$  de  $H$  puede expresarse como:

$$F = \sum_{m \in M} F^m e_m$$

Sin embargo, en general esto no es una base ya que  $M$  no es finito. Los  $F^m$  son las proyecciones ortogonales de  $F$  sobre el subespacio generado por  $e_m$ . O lo que es lo mismo,

$$F^m = (F, e_m) = \int_s F e_m^* ds \quad [\text{II.2}]$$

Si suponemos el caso de una sola variable  $F = F(x, t)$  el sistema [II.1] se reduce a:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L(F) \quad [\text{II.3}]$$

con la condición inicial  $F(x, 0) = f(x)$ .

Ahora bien, como no podemos trabajar con un número infinito de componentes, tenemos que proyectar  $F$  sobre un subespacio finito de  $H$ , al que llamaremos  $\bar{H}$  (procedimiento de truncación).

De este modo  $F$  se aproxima por:

$$\bar{F}(x, t) = \sum_{m=1}^M F^m(t) e_m(x) \quad [II.4]$$

El siguiente paso es revolver la ecuación [II.3] para  $\bar{F}$ , o sea:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = L(\bar{F}) \quad F(x, 0) = \bar{F}(x, 0)$$

Sin embargo, esto no es posible ya que  $\bar{F}$  pertenece a  $\bar{H}$  (el subespacio truncado y  $L(\bar{F})$  no tiene por qué. Entonces tenemos que reemplazar esta ecuación por:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \overline{L(\bar{F})}$$

donde  $\overline{L(\bar{F})}$  es la expresión truncada de  $L(\bar{F})$  que ya sí pertenece a  $\bar{H}$ .

Derivando parcialmente con respecto al tiempo la ecuación [II.2] resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^m}{\partial t} &= \frac{d F^m}{d t} = \int_s \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} e_m^*(x) dx = \\ &= \int_s L(\bar{F}) e_m^*(x) dx \end{aligned}$$

O sea, que:

$$\frac{d F^m}{d t} = [L(\bar{F})]^m = \int_s L(\bar{F}) e_m^*(x) dx$$

De esta manera hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entonces, si podemos evaluar con algún procedimiento el segundo miembro, podremos conocer la evolución temporal de los coeficientes  $F^m$ , y con ellos, la evolución temporal de la variable meteorológica  $F$  con la ecuación [II.4].

Este tipo de truncaciones constituyen el "método Galerkin" en el que las funciones  $e_m(x)$  son las llamadas funciones test o funciones básicas.

Como ya hemos dicho,  $L(\bar{F})$  no tiene por qué pertenecer a  $\bar{H}$  por lo que podemos definir como

$R(\bar{F})$  el error cometido al truncar la serie infinita de  $F$ , o sea:

$$R(\bar{F}) = \frac{\partial F}{\partial t} - L(\bar{F}) = \overline{L(\bar{F})} - L(\bar{F}) \neq 0$$

Ahora bien, puesto que los  $e_m(x)$  son ortogonales,  $R(\bar{F})$  pertenece al complementario de  $\bar{H}$  (o sea  $H - \bar{H}$ ) y, por lo tanto es ortogonal a todos los elementos de  $\bar{H}$  y, en particular, a  $\bar{F}$ , o sea:

$$\int_s R(\bar{F}) \bar{F} dx = 0 \quad [II.5]$$

Esta propiedad es muy importante, como veremos después.

Entonces la serie de coeficientes  $F^m$  forman el "espectro" de  $F$ , y de ahí el nombre de "espectral" dado a este método.

Puesto que la mayor parte de las veces se trabaja en predicción numérica con problemas hemisféricos o globales, es conveniente elegir como funciones para los desarrollos en serie las que tengan simetría esférica. Además, también es conveniente elegir funciones que simplifiquen el operador  $L$  de la ecuación [II.3]. Como hemos dicho antes, este operador incluye operadores diferenciales espaciales (derivadas verticales y horizontales, laplacianos horizontales, etc.), términos no lineales y, posiblemente, algunas integrales verticales. Esta simplificación se obtiene si las funciones elegidas son funciones propias de algunos suboperadores de  $L$ . Este es el caso de las funciones armónicas esféricas:

$$Y_n^m(\lambda, \varphi) = e^{im\lambda} P_n^m(\text{sen } \varphi) \quad [II.6]$$

donde, como siempre,  $\lambda$  es la longitud,  $\varphi$  la latitud, "m" es el número de onda zonal y "n" es el llamado frecuentemente, número de onda total.  $P_n^m(\text{sen } \varphi)$  son las funciones asociadas de Legendre de primera clase, de orden m y grado n. Estos armónicos esféricos son funciones propias de la ecuación de Legendre:

$$\nabla^2 Y_n^m + b Y_n^m = 0; \quad b = \frac{n(n+1)}{a^2}$$

donde "a" es el radio de la esfera.

La definición más clásica de las funciones asociadas de Legendre es la de Rodrigues:

$$P_n^m(\mu) = \left[ (2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \right]^{1/2} \cdot \frac{(1 - \mu^2)^{|m|/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+|m|}(1 - \mu^2)^n}{d\mu^{n+|m|}} \quad [\text{II.8}]$$

donde  $\mu = \text{sen } \varphi$ .

Los armónicos esféricos son también funciones propias del operador diferenciación zonal, es decir:

$$\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = im Y_n^m \quad [\text{II.9}]$$

Una propiedad importante de las funciones de Legendre es la ortonormalidad, ya que con la definición [II.8] elegida se cumple:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m P_{n'}^m d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n' \\ 1 & \text{si } n = n' \end{cases} \quad [\text{II.10a.}]$$

Y, por lo tanto:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m Y_{n'}^{m'*} d\lambda d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, m) \neq (n', m') \\ 1 & \text{si } (n, m) = (n', m') \end{cases} \quad [\text{II.10b.}]$$

siendo  $Y_{n'}^{m'*}$  el complejo conjugado de  $Y_{n'}^{m'}$ .

Por lo tanto, en el espacio de las funciones complejas continuas sobre una esfera  $H(S)$  con el producto escalar:

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} fg^* d\lambda d\mu$$

los  $Y_n^m$  forman un sistema ortogonal. Con este producto escalar  $H(S)$  es un espacio de Hilbert y se puede demostrar que  $Y_n^m$  forman una base hil-

bertiana de  $H(S)$  (Hobson, 1931). Por lo tanto, cada función continua  $F(\lambda, \varphi)$  sobre una esfera puede ser expresada como:

$$F(\lambda, \varphi) = \sum_m \sum_n F_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) = \sum_m \sum_n F_n^m Y_n^m \quad [\text{II.11}]$$

Si  $F = F(\lambda, \mu, \eta, t)$ , siendo  $\eta$  alguna coordenada vertical, entonces:

$$F = \sum_m \sum_n F_n^m(\eta, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad [\text{II.12}]$$

Como una consecuencia de [II.2] se calculan los  $F_n^m$  como:

$$F_n^m(\eta, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu, \eta, t) Y_n^m(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

Y a estos coeficientes se les llama componentes espectrales de  $F$ . Hay que notar que esta última ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$F_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F P_n^m d\mu \right] e^{-im\lambda} d\lambda \quad [\text{II.13a}]$$

que es la convolución de una transformada de Fourier:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ( ) e^{-im\lambda} d\lambda \quad [\text{II.13b.}]$$

por lo que podríamos llamar una transformada de Legendre:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 ( ) P_n^m(\mu) d\mu \quad [\text{II.13c.}]$$

Como consecuencias inmediatas de la definición de las funciones asociadas de Legendre pueden deducirse las siguientes propiedades:

$$P_n^{-m}(\mu) = P_n^m(\mu) \Rightarrow Y_n^{-m}(\lambda, \mu) = Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \quad [\text{II.14a.}]$$

$$P_n^m(\mu) = 0 \text{ si } |m| > n \quad [\text{II.14b.}]$$

$$P_n^m(-\mu) = (-1)^{n+|m|} P_n^m(\mu) \quad [\text{II.14c}]$$

La propiedad [II.14b] implica que [II.12] puede escribirse como:

$$F = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^m Y_n^m \quad [\text{II.15}]$$

La propiedad [II.14c] prueba la simetría o antisimetría de las funciones del desarrollo respecto al Ecuador.

Hay algunas fórmulas de recurrencia para calcular los valores de  $P_n^m$ , la usada en el Centro Europeo de Predicción a Plazo Medio (CEPPM) es:

$$P_n^m(\mu) = C_n^m P_{n-2}^{m-2}(\mu) - d_n^m P_{n-1}^{m-2}(\mu) + e_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad [\text{II.16}]$$

siendo:

$$C_n^m = \left[ \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{m+n-1}{m+n} \cdot \frac{m+n-3}{m+n} \right]^{1/2}$$

$$d_n^m = \left[ \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{m+n-1}{m+n} \cdot \frac{n-m+1}{m+n-2} \right]^{1/2}$$

$$e_n^m = \left[ \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{n-m}{n+m} \right]^{1/2} \quad \text{para } m > 0$$

También hay otra fórmula de recurrencia para calcular las derivadas meridionales (ya que los armónicos esféricos no son funciones propias de  $\frac{\partial}{\partial \mu}$ ):

$$(\mu^2 - 1) \frac{d P_n^m}{d \mu} = n \epsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m - (n+1) \epsilon_n^m P_{n-1}^m \quad [\text{II.17}]$$

$$\text{con } \epsilon_n^m = \left[ \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right]^{1/2}$$

Ahora bien, sabemos que tenemos que truncar el desarrollo en serie [II.15] para tener un número finito de componentes.

Antes, hay que tener en cuenta que cuando  $m$  y  $n$  aumentan es como si disminuyeran las escalas horizontales, o sea, aumenta la resolución espacial del modelo. De manera que usando los armónicos esféricos ( $Y_n^m$ ) tenemos un control directo sobre las escalas que queremos despreciar, de la misma manera que los métodos de puntos de rejilla lo hacen al elegir el intervalo de la rejilla. La forma del desarrollo truncado es:

$$\bar{F} = \sum_{n=-M}^M \sum_{n/|m|}^{N(m)} F_n^m Y_n^m$$

El hecho de que  $m$  vaya de  $-M$  a  $M$  asegura que  $F$  es real, ya que de [II.13] y [II.14a] se deduce que  $F_n^{-m} = F_n^{m*}$ , y por lo tanto  $F_n^{-m} \cdot Y_n^{-m} + F_n^m \cdot Y_n^m$  es real.

Como se puede demostrar que  $\bar{F}$  converge a  $F$  (Jarraud & Simmons 1983), la principal cuestión que queda por resolver es la elección de  $N(m)$ . Las dos truncaciones más comunes usadas en los modelos de predicción numérica son las llamadas "triangular" y "romboidal", que pueden representarse en el plano  $(m, n)$  como se muestra en la figura 1.

La razón para elegir una determinada truncación se relaciona con el mejor uso de los grados de libertad (es decir, de las componentes espectrales retenidas), o sea, que trata de obtener mejores resultados con el mismo número de grados de libertad.

Aunque al principio, los modelos espectrales usaban truncaciones romboidales, los más recientes usan truncaciones triangulares, ya que parece que dan mejores resultados y son más eficientes desde el punto de vista computacional.

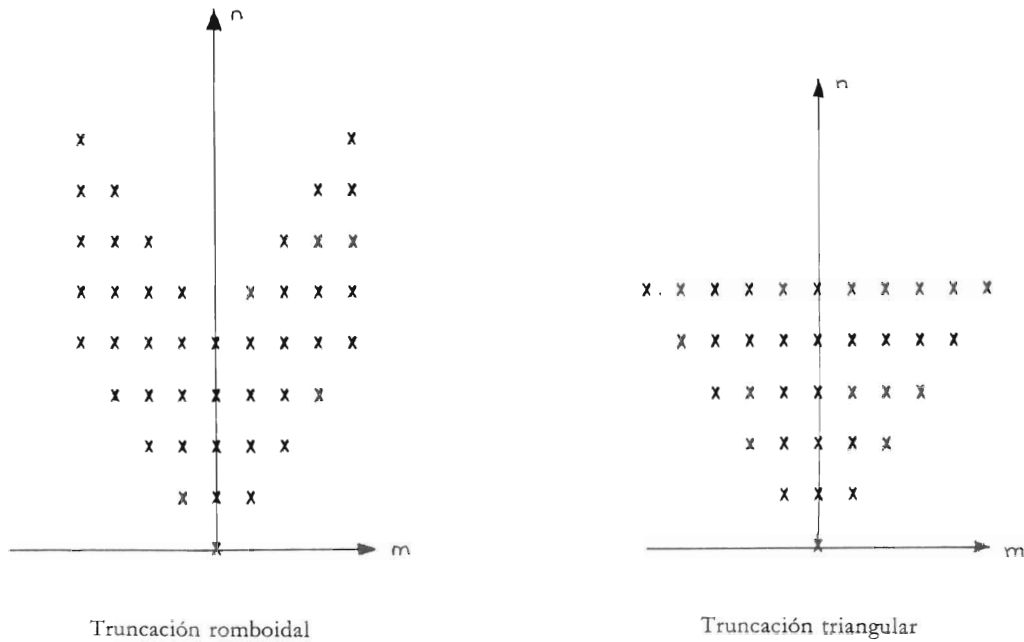


Figura 1.—Representación en el plano (m, n) de las truncaciones romboidal y triangular.

**III. La ecuación barotrópica de la vorticidad en coordenadas cartesianas o locales y esféricas**

En este punto nos vamos a limitar a obtener las expresiones más adecuadas de la ecuación barotrópica de la vorticidad para la aplicación del método espectral, para ello partimos de la conocida expresión de dicha ecuación en el nivel de no divergencia:

$$\frac{d}{dt} (\zeta + f) = 0$$

Desarrollando el operador  $d/dt$  como  $\partial/\partial t + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$  y teniendo en cuenta que el parámetro de Coriolis “f” sólo depende de la latitud  $\phi$  y, por tanto, de la coordenada “y”, resulta:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} \zeta + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ya que  $\vec{V}_h$  tiene como componentes “x” e “y” a “u” y “v” respectivamente. Puesto que en este nivel el viento es no-divergente, puede expresar-

se en términos de la función de corriente “ $\psi$ ” definida como:

$$\vec{V}_h = \vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi$$

O, lo que es lo mismo:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ya que esta función cumple la condición de  $\nabla \cdot \vec{V}_h = 0$ . Además la vorticidad queda como:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_h = \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi) = \nabla^2 \psi$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la vorticidad, resulta ésta en su forma barotrópica:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + (\vec{k} \wedge \nabla \psi) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{III.1}$$

Siendo  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$  el parámetro que mide la variación del parámetro de Coriolis con la coordenada "y". Desarrollando los productos queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \left[ - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{[III.2]}$$

Que es la forma que usaremos después de la ecuación barotrópica de la vorticidad en coordenadas locales.

Para poner esta ecuación en coordenadas esféricas ( $\varphi, \lambda$  y radio de la Tierra "a") tenemos que transformar el segundo miembro de la ecuación y el operador laplaciano. Para ello, tenemos que tener en cuenta las relaciones siguientes:

$$dx = a \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$$

$$dy = a \cdot d\varphi$$

Y el operador laplaciano resulta:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]$$

Si hacemos ahora el cambio  $\mu = \sin \varphi$  y agrupamos términos, resulta la ecuación en coordenadas esféricas y el operador laplaciano de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right] + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{[III.3]}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) \quad \text{[III.4]}$$

$$+ \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Bigg]$$

Una de las propiedades más importantes que cumple la solución analítica de esta ecuación es la de conservar tres magnitudes medias, éstas son, el momento angular medio ( $\bar{M}$ ), la energía cinética media ( $\bar{K}$ ) y la vorticidad cuadrática media o "enstrofia" ( $\bar{E}$ ). O sea, que la solución analítica cumple:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = 0; \quad \frac{d\bar{K}}{dt} = 0; \quad \frac{d\bar{E}}{dt} = 0 \quad \text{[III.5]}$$

donde las barras indican un valor medio global definido por:

$$\overline{(\quad)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\quad) d\lambda d\mu = \frac{1}{S} \int_s (\quad) ds \quad \text{[III.6]}$$

y donde  $M = u \cdot a \cdot \cos \varphi$ ,  $K = (V^2)/2$  y  $E = (\zeta^2)/2$ . Para probar la invariancia del momento angular medio, deduciremos para él una expresión alternativa.

$$\bar{M} = \frac{1}{S} \int_s u a \cos \varphi ds = \frac{a}{S} \int_s u \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} ds = \frac{a^2}{S} \int_s \left( u \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - v \frac{\partial \mu}{\partial \cos \varphi \partial \lambda} \right) ds = \frac{a^2}{S} \int_s \mu \left( \frac{\partial v}{\partial \cos \varphi \partial \lambda} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial (\mu \cos \varphi)}{a \partial \varphi} \right) ds = \frac{a^2}{S} \int_s \mu \zeta ds$$

Y, por tanto:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \frac{a^2}{S} \int_s \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot ds \quad \text{[III.7]}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la ecuación no divergente de la vorticidad resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{M}}{dt} &= \frac{a^2}{S} \int_S \mu [-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f)] ds = \\ &= \frac{a^2}{S} \int_S [\mu \vec{\nabla} (\varphi + f) \cdot \vec{\nabla}] ds \end{aligned}$$

Ya que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\varphi + f) = \vec{\nabla} \cdot (\zeta + f) \vec{V} - (\varphi + f) \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ , pero como se trata de flujo no divergente el segundo sumando es cero. Entonces podemos transformar el integrando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\mu \vec{\nabla} (\zeta + f) \cdot \vec{V} = \\ &= -\vec{\nabla} [\mu (\zeta + f) \cdot \vec{V}] + (\zeta + f) \cdot \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \mu = \\ &= -\vec{\nabla} [\mu (\zeta + f) \cdot \vec{V}] + \frac{1}{a^2} (\zeta + f) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \\ &= -\vec{\nabla} [\mu (\zeta + f) \cdot \vec{V}] + \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f) \psi] - \psi \frac{\partial (\zeta + f)}{\partial \lambda} \right] = \\ &= -\vec{\nabla} [\mu (\zeta + f) \cdot \vec{V}] + \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f) \psi] - \psi \frac{\partial}{\partial \lambda} (\nabla^2 \psi) \right] = \\ &= -\vec{\nabla} \left[ \mu (\zeta + f) \vec{V} + \frac{\psi}{a^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right] + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f) \psi] + \left( \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \left( \frac{\vec{\nabla} \psi}{a^2} \right) \end{aligned}$$

El último de los sumandos puede transformarse en:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \psi}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\nabla \psi) &= \frac{\nabla \psi}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\nabla \psi) = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \psi)^2 \right] = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{2} (\vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi) \right] = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right] = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{2} V^2 \right]$$

Sustituyendo en la expresión del radicando queda:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \left[ \mu (\zeta + f) \vec{V} + \frac{\psi}{a^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right] \\ &+ \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (\zeta + f) \psi + \frac{1}{2} V^2 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en [III.7] vemos que la variación temporal del momento angular viene regida por dos integrales. La primera de ellas es la integral sobre la superficie de una esfera (la Tierra) del gradiente de una magnitud. Haciendo uso del teorema de Gauss dicho flujo es igual a la circulación del rotacional del vector a lo largo de una línea cerrada, luego sería, en este caso, la circulación de  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} A)$  que es igual a 0, luego la primera integral se anula.

La segunda integral es la de la derivada con respecto a la longitud  $\lambda$  de una magnitud escalar, por tanto, separando las integrales en  $\lambda$  y  $\mu$  según la expresión [III.6] e integrando en S, queda una diferencial exacta entre 0 y  $2\pi$  y como éstos son el mismo punto, la integral también se anula. De esta manera hemos probado que se cumple la primera de las ecuaciones [III.5], o sea, que el momento angular medio se conserva invariante con el tiempo.

Un procedimiento similar puede usarse para probar los otros dos invariantes de [III.5].

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} V^2 \right] = |\vec{V}| \frac{\partial}{\partial t} |\vec{V}| \\ &= |\vec{\nabla} \psi| \cdot \frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla} \psi| = |\vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t}| \\ &= (|\nabla \psi|) - \psi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \psi \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = -\psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \psi \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

de manera que el teorema de Gauss implica:

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} = - \frac{1}{S} \int_S \psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} ds \quad \text{[III.8]}$$

De la misma forma, obtenemos que:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{S} \int_S \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} ds \quad \text{[III.9]}$$

Usando la ecuación de la vorticidad, los integrandos de ambas magnitudes pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\psi \nabla \cdot \nabla (\zeta + f) = \\ &= -\psi \nabla (\zeta + f) \cdot \nabla + \psi (\zeta + f) \nabla \cdot \nabla = \\ &= -\nabla \cdot [\psi (\zeta + f) \cdot \nabla] + (\zeta + f) \nabla \cdot \nabla \psi = \\ &= -\nabla \cdot [\psi (\zeta + f) \cdot \nabla] + (\zeta + f) (\bar{k} \cdot \nabla \psi) \cdot \psi = \\ &= -\nabla \cdot [\psi (\zeta + f) \cdot \nabla]; \end{aligned}$$

$$\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = (\zeta + f) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} =$$

$$= -(\zeta + f) \nabla \cdot \nabla (\zeta + f) - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla$$

$$\left[ \frac{1}{2} (\zeta + f)^2 \right] - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot$$

$$\left[ \frac{1}{2} (\zeta + f)^2 \cdot \nabla \right] + \frac{1}{2}$$

$$(\zeta + f)^2 \nabla \cdot \nabla - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[ (\zeta + f)^2 \cdot \nabla \right] - 2 \Omega \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Y aplicando el teorema de Gauss a las integrales resulta que:

$$\frac{d \bar{K}}{dt} = 0 \text{ y } \frac{d \bar{E}}{dt} = 0.$$

Estas tres invariancias son muy importantes ya que constituyen lo único que sabemos de la solución analítica de la ecuación barotrópica de la vorticidad, por tanto, cuando obtengamos una solución espectral aproximada (truncada) lo primero que deberemos hacer es exigirle que cumpla estas tres invariancias, para así estar seguro de que la solución truncada tenderá a la analítica cuando el número de términos retenidos tienda a infinito y que, por tanto, se la pueda considerar una solución aproximada de la ecuación, consistente con la solución analítica.

#### IV. Ecuación de la vorticidad en coordenadas cartesianas. Desarrollo de la función de corriente en serie de Fourier

Partimos, en este caso, de la ecuación [III.1] que es la ecuación barotrópica de la vorticidad en forma vectorial y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + (\bar{k} \cdot \nabla \psi) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) + \beta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Suponemos que la función de corrientes es periódica en las coordenadas "x" e "y", o sea:

$$\begin{aligned} \psi \left( x + \frac{2\pi}{k}, y + \frac{2\pi}{l}, t \right) &= \\ &= \psi(x, y, t) \end{aligned}$$

Entonces para este caso del plano-β y esta condición de periodicidad, las funciones ortogonales básicas apropiadas son las de Fourier, o sea:

$$\Phi_{m,n}(x, y) = e^{i(mkx + nly)}$$

Que, como se sabe, son las soluciones propias de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi + b \phi = 0$$

Siendo  $b = (m^2 \cdot k^2 + n^2 \cdot l^2)$ . Y la función de corriente es:

$$\psi(x, y, t) \simeq \sum_m \sum_n C_{m,n}(t) e^{i(mkx + nly)} \quad [IV.1]$$

Además, para que  $\psi$  sea real los coeficientes del desarrollo han de satisfacer la condición:

$$C_{m,n} = C_{-m,-n}^*$$

Para simplificar la notación, introducimos el vector número de onda  $\vec{M} = m \cdot \vec{k} + n \cdot \vec{l}$  y el radio vector  $\vec{R} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$  y entonces queda:

$$\psi(x, y, t) \simeq \sum C_m(t) e^{i\vec{M} \cdot \vec{R}} \quad b = \vec{M} \cdot \vec{M} \quad [IV.2]$$

Con este desarrollo en serie la expresión de la vorticidad es:

$$\zeta = \nabla^2 \cdot \psi \simeq \sum_M C_M(t) \cdot \nabla^2 \cdot e^{i\vec{M} \cdot \vec{R}} = -\sum_M C_M (\vec{M} \cdot \vec{M}) \cdot e^{i\vec{M} \cdot \vec{R}} \quad [IV.3]$$

Y además resulta que:

$$\vec{\nabla} \psi \simeq \sum_H C_H \vec{\nabla} e^{i\vec{H} \cdot \vec{R}} = \sum_H i\vec{H} C_H e^{i\vec{H} \cdot \vec{R}} \quad [IV.4]$$

$$\vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) \simeq -\sum_L C_L (\vec{L} \cdot \vec{L}) \vec{\nabla} e^{i\vec{L} \cdot \vec{R}} = -\sum_L C_L i \vec{L} (\vec{L} \cdot \vec{L}) e^{i\vec{L} \cdot \vec{R}} \quad [IV.5]$$

Sustituyendo en la ecuación de la vorticidad queda:

$$-\sum_L (\vec{L} \cdot \vec{L}) \frac{dC_L}{dt} e^{i\vec{L} \cdot \vec{R}} + \left[ \sum_H i(\vec{k} \wedge \vec{H}) C_H e^{i\vec{H} \cdot \vec{R}} \right] \cdot \left[ -\sum_L C_L (\vec{L} \cdot \vec{L}) i \vec{L} e^{i\vec{L} \cdot \vec{R}} \right] + i \beta \sum_L L_x C_L e^{i\vec{L} \cdot \vec{R}} = e_N$$

donde  $\vec{k}$  es el vector unitario según el eje vertical,  $e_N$  es el error cometido al sustituir la función de corriente por el desarrollo en serie y  $L_x$  es la componente "x" del vector número de onda

$\vec{L}$ , o sea,  $m \cdot k$ , donde  $k$  es ahora el número de onda según el eje "X".

El producto  $(\vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi)$  queda:

$$-\sum_H \sum_L i^2 C_L C_M (\vec{L} \cdot \vec{L}) (\vec{k} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{L} e^{i(\vec{H} + \vec{L}) \cdot \vec{R}} = \sum \sum (\vec{L} \cdot \vec{L}) \vec{k} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{L}) C_H C_L e^{i(\vec{H} + \vec{L}) \cdot \vec{R}}$$

Ya que  $[\vec{k} \wedge \vec{H}] \cdot \vec{L} = \vec{k} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{L}) = -L_x H_y + L_y H_x$

Ahora, multiplicamos la ecuación de la vorticidad por el conjugado de las funciones básicas  $\exp(-i \cdot \vec{M} \cdot \vec{R})$ , integramos sobre el dominio periódico y obligamos a que el error sea ortogonal con las funciones básicas y resulta:

$$\int_0^{2\pi/2} \int_0^{2\pi/1} \left[ -\sum_L (\vec{L} \cdot \vec{L}) \frac{dC_L}{dt} e^{i(\vec{L} - \vec{M}) \cdot \vec{R}} + i\beta \sum_L L_x C_L e^{i(\vec{L} - \vec{M}) \cdot \vec{R}} + \sum_L \sum_H (\vec{L} \cdot \vec{L}) K(\vec{H} \wedge \vec{L}) C_H C_L e^{i(\vec{H} + \vec{L} - \vec{M}) \cdot \vec{R}} \right] \cdot dy dx = \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} e_N \cdot e^{-i\vec{M} \cdot \vec{R}} dy dx = 0$$

Esto se hace, lógicamente para cada  $\vec{M}$  del desarrollo en serie inicial de  $\psi$ . Como las funciones básicas de Fourier son ortogonales, cada integral se anulará salvo que el exponente de la exponencial sea 0, o sea, que para cada  $\vec{M}$  queda:

$$-(\vec{M} \cdot \vec{M}) \frac{dC_M}{dt} + i\beta M_x C_M + \sum_H (\vec{M} - \vec{H}) (\vec{M} - \vec{H}) \vec{k} \cdot \vec{H} \wedge (\vec{M} - \vec{H}) C_H C_{M-H} = 0$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{H} \wedge (\vec{M} - \vec{H}) = \vec{H} \wedge \vec{M} - \vec{H} \wedge \vec{H}$ , la ecuación diferencial ordinaria de cada coeficiente  $C_M$  queda:

$$\frac{dC_M}{dt} = \frac{i\beta M_x C_M}{\vec{M} \cdot \vec{M}} + \sum_H \frac{(\vec{M} - \vec{H}) (\vec{M} - \vec{H}) \vec{k} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{M})}{\vec{M} \cdot \vec{M}} C_H C_{M-H} \quad [IV.6]$$

Entonces, si N es el número de términos del desarrollo de  $\psi$ , obtenemos así un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes del desarrollo. El último término de la ecuación surge de la interacción entre diferentes ondas que provienen del término de advección-lineal de la ecuación de la vorticidad. En particular, la onda  $\bar{M}$  está afectada por la interacción de todas las ondas  $\bar{H}$  con la  $\bar{M} - \bar{H}$ . Cuando se desprecia este término de interacción resulta un sistema de ecuaciones lineales desacopladas que tiene como solución la onda de Rossby.

$$\frac{dC_M}{dt} = iA_M C_M \text{ siendo } A = \frac{\beta m k}{m^2 k^2 + n^2 l^2}$$

$$C_M = B_M e^{iA_M t} \Rightarrow \psi = \sum C_M e^{iMR} =$$

$$= \sum_M B_M e^{i(MR + A_M t)} = \sum_m \sum_n B_{m,n} e^{i(mkx + nly + A_M t)}$$

$$\text{Velocidad de fase: } \frac{\beta m k}{m^2 k^2 + n^2 l^2}$$

Como vemos, la velocidad de fase de la onda resultante es efectivamente la de la onda de Rossby.

Entonces cada una de las ecuaciones del sistema [IV.6] puede resolverse con un esquema de diferencias finitas centradas. Si despreciamos los términos de orden superior al primero resulta:

$$C_M^{t+\Delta t} = C_M^{t-\Delta t} + 2\Delta t \cdot \left( \frac{dC_M}{dt} \right)^t \quad [IV.7]$$

Entonces con un proceso iterativo para las ecuaciones [IV.6] y [IV.7] puede calcularse la evolución temporal de los coeficientes del desarrollo de la función de corrientes y sustituyendo estos valores en las ecuaciones [IV.2], [IV.3], [IV.4] y [IV.5] pueden calcularse los valores previstos de la vorticidad y la velocidad del viento. Además, puesto que el procedimiento de Galerkin conserva los invariantes que surgen de las no linealidades cuadráticas de las ecuaciones origi-

nales, vamos a demostrar que en este caso se siguen conservando con este esquema la energía cinética media y la vorticidad cuadrática media o “enstrofia”. La energía cinética media para la región es:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}}{2} dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \frac{(\bar{k} \wedge \bar{\nabla} \psi) (\bar{k} \wedge \bar{\nabla} \psi)}{2} dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \frac{|\bar{k} \wedge \nabla \psi|^2}{2} dy dx \\ &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \frac{\bar{\nabla} \psi \cdot \bar{\nabla} \psi}{2} dy dx \end{aligned}$$

Ya que, como el  $\bar{\nabla} \psi$  es un vector horizontal, el ángulo que forma con el vector vertical  $\bar{k}$  es  $90^\circ$ , luego  $|\bar{k} \wedge \bar{\nabla} \psi|^2 = [|\bar{k}| \cdot |\bar{\nabla} \psi| \cdot \sin 90^\circ]^2 = |\bar{\nabla} \psi|^2 = \bar{\nabla} \psi \cdot \bar{\nabla} \psi$ . Sustituyendo el valor de  $\bar{\nabla} \psi$  dado por [IV.4], resulta:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \frac{1}{2} \sum_H \sum_M \\ &= i^2 \bar{H} \bar{M} C_H C_M e^{i(H+M)R} dy dx = -\frac{1}{2} \sum_H \sum_M \\ &= \bar{H} \bar{M} C_H C_M \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} e^{i(H+M)R} dy dx \end{aligned}$$

De la condición de ortogonalidad de las funciones básicas deducimos que la integral será cero, salvo cuando  $\bar{H} = -\bar{M}$ , y entonces quedará:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{1}{2} \sum_M \bar{M} \cdot \bar{M} C_M C_{-M} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_M |M|^2 |C_M|^2 \end{aligned} \quad [IV.8]$$

Ya que, según vimos antes,  $C_M = C_{-M}^*$ . Y ésta es la expresión de la energía cinética para todo el dominio.

Para el caso de la “enstrofia” resulta:

$$E = \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \zeta^2 dy dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} (\nabla^2 \psi)^2 dy dx = \\
 &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} (\nabla^2 \psi) \cdot (\nabla^2) dx dy = \\
 &= \sum_H \sum_M C_M C_H (\vec{M} \cdot \vec{M}) \cdot (\vec{H} \cdot \vec{H}) \\
 &\int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} e^{i(H+M)R} dy dx \\
 \bar{E} &= \sum_M (\vec{M} \cdot \vec{M})^2 \cdot |C_M|^2 \quad [IV.9]
 \end{aligned}$$

Sabemos que para que un sistema cualquiera conserve la energía el operador L de la ecuación diferencial debe cumplir la siguiente condición (Haltiner 1980, pág. 186):

$$\int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \psi L(\psi) dx dy = 0$$

Como la ecuación de la vorticidad conserva la energía, el operador L definido por: [IV.10]

$$L(\psi) = -(\vec{k} \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

tiene que cumplir la condición [IV.10]. Entonces poniendo la expresión de  $\psi$  dada por [IV.2] e integrando en todo el dominio obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \left( \sum_M C_M e^{iMR} \right) \cdot \left[ \left( \sum_H \right. \right. \\
 & \left. \left. i(\vec{k} \wedge \vec{H}) C_H e^{iHR} \right) \left( -\sum_L C_L (\vec{L} \cdot \vec{L}) i \vec{L} e^{iLR} \right) + \right. \\
 & \left. + i\beta \sum_L L_x C_L e^{iLR} \right] dy dx = \sum_M \sum_H \sum_L \\
 & i(\vec{k} \wedge \vec{H}) \vec{L} (\vec{L} \cdot \vec{L}) C_M C_H C_L \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} e^{i(M+H+L)R} \\
 & dy dx - \sum_M \sum_L i\beta L_x C_L C_M \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} e^{i(L+M)R} dy dx
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad de las funciones básicas resulta:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi/l} \psi L(\psi) dy dx &= \sum_M i\beta M_x C_M^* C_M + \\
 \sum_M \sum_H \vec{k} [H \wedge (\vec{M} + \vec{H})] \cdot (\vec{M} + \vec{H}) (\vec{M} + \vec{H}) \\
 C_M C_H C_{-(H+M)} &= 0
 \end{aligned}$$

Con lo que con las funciones básicas utilizadas y la aproximación de Galerkin, la condición [IV.10] se transforma en:

$$\sum_M i\beta M_x |C_M|^2 + \sum_M \sum_H \vec{k} (\vec{H} \wedge \vec{M}) (\vec{M} + \vec{H}) (\vec{M} + \vec{H}) C_M C_H C_{-(M+H)} = 0 \quad [IV.11]$$

Vamos a demostrar ahora que con esta condición se conservan la energía cinética y la enstrofía:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = 0 \quad \frac{d\bar{E}}{dt} = 0$$

Para la energía cinética, utilizamos su expresión dada por [IV.8] y resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{K}}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_M (\vec{M} \cdot \vec{M}) \frac{d}{dt} (|C_M|^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_M (\vec{M} \cdot \vec{M}) \frac{d}{dt} (C_M C_M^*) = \frac{1}{2} \sum_M \\
 (\vec{M} \cdot \vec{M}) & \left[ C_M \frac{dC_M^*}{dt} + C_M^* \frac{dC_M}{dt} \right] = A + B
 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación [IV.6] resulta:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \sum_M (\vec{M} \cdot \vec{M}) C_M \frac{dC_M^*}{dt} = \frac{1}{2} \sum_M \\
 (\vec{M} \cdot \vec{M}) C_M \frac{dC_M}{dt} &= - \frac{1}{2} \left[ \sum_M \right. \\
 & \left. i\beta M_x C_M C_M + \sum_M \sum_H \right. \\
 (\vec{M} + \vec{H}) (\vec{M} + \vec{H}) \vec{k} (\vec{H} \wedge \vec{M}) & C_M C_H C_{-(M+H)} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Se ve que con la ecuación [IV.11]  $A = 0$ . Para el término B queda:

$$B = \frac{1}{2} \sum_M i\beta M_x C_M^* C_M + \sum_M \sum_H (\vec{M} - \vec{H}) (\vec{M} - \vec{H}) \vec{k} (\vec{H} \wedge \vec{M}) C_M C_H C_{M-H}$$

Que con la condición [IV.11] se hace también cero. Por tanto, hemos demostrado que con las funciones básicas usadas, la aproximación de Galerkin mantiene la invariancia de la energía cinética. Análogamente se puede demostrar la invariancia de la enstrofia.

**V. Ecuación de la vorticidad sobre una esfera. Desarrollo de la función de corriente en funciones asociadas de Legendre**

*V.1. Método de los coeficientes de interacción*

Partimos de la ecuación [III.3] y siendo la correspondiente expresión de laplaciano la dada por la ecuación [III.4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right] + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]$$

Entonces, como hemos visto en la Sección II, puesto que el problema tiene simetría esférica, los armónicos esféricos apropiados son:

$$Y_n^m(\mu, \lambda) = P_n^m(\mu) \cdot e^{im\lambda}$$

donde los  $P_n^m$  son, como antes, las funciones asociadas de Legendre cuya expresión se da en la ecuación [II.8]. Como ya hemos visto allí estos armónicos son ortogonales y están normalizados. Entonces la función de corriente es:

$$\psi(\mu, \lambda, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \psi_n^m(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \quad [V.1]$$

Siguiendo los pasos de la Sección II los coeficientes del desarrollo se obtienen de la ecuación [II.13]:

$$\psi_n^m(t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi(\mu, \lambda, t) \cdot Y_n^{m*} d\mu d\lambda$$

Teniendo en cuenta la ecuación [II.7] la expresión de la vorticidad es:

$$\zeta = \nabla^2 \psi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n(n+1) \psi_n^m(t) \cdot Y_n^m(\mu, \lambda) \quad [V.2]$$

Entonces sustituyendo en la ecuación de la vorticidad las expresiones de  $\psi$  y  $\nabla^2 \psi$ , multiplicando por  $Y_n^m$ , integrando con respecto a  $\lambda$  y  $\mu$ , y usando la condición de ortogonalidad, queda:

$$0 = - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n(n+1) \frac{d\psi_n^m}{dt} Y_n^m - \frac{1}{a^2} \left[ \left( a^2 \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \psi_{n_1}^{m_1} \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} \right) \cdot \left( \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N n_2(n_2+1) \psi_{n_2}^{m_2} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \lambda} \right) - \left( a^2 \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \psi_{n_1}^{m_1} \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \lambda} \right) \cdot \left( \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N n_2(n_2+1) \psi_{n_2}^{m_2} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} \right) \right] + \frac{2\Omega}{a^2} a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \psi_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} \quad [V.3]$$

$$-n(n+1) \frac{d\psi_n^m}{dt} = -2\Omega m i \psi_n^m + F_n^m \quad [V.4]$$

donde  $F_n^m$  tiene la siguiente expresión:

$$F_n^m = - \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N i \psi_{n_1}^{m_1} \psi_{n_2}^{m_2} L(m, n; m_1, n_1; m_2, n_2) \quad [V.5]$$

A los términos L se les llama coeficientes de interacción y su expresión es:

$$L(m, n; m_1, n_1; m_2, n_2) = \frac{1}{2} \left[ n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1) \right] \int_{-1}^1 P_n^{m_1} \left[ m_1 P_{m_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{d\mu} - m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{m_1}^{m_1}}{d\mu} \right] d\mu$$

$$= 0 \text{ si } m = m_1 + m_2 \text{ ó si } m \neq m_1 + m_2 \quad [V.6]$$

Las expresiones de  $F_n^m$  y  $L$  resultan de utilizar la condición de ortogonalidad en la ecuación [V.3]. Al multiplicar cada par de paréntesis del término no lineal obtenemos el producto de los cuatro sumatorios que aparecen en  $F_n^m$  (se ha usado el subíndice 1 para la expresión de  $\psi$  y el 2 para la de  $\zeta$ ). Puesto que en cada uno de los sumandos aparece  $\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = P_n^m \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{im\lambda}) = im Y_n^m$

se justifica así la aparición de la constante "i" ( $=\sqrt{-1}$ ) en la expresión  $F_n^m$ . Del producto de los dos paréntesis de cada término se justifica la inclusión en  $F_n^m$  de los términos comunes  $\psi_{n_1}^{m_1} \psi_{n_2}^{m_2}$  que resultan de cada producto.

La justificación de la expresión de los coeficientes de interacción es un poco más complicada. Al hacer el producto de los dos paréntesis quedan términos de la forma:

$$\frac{\partial Y_n^{m'}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial Y_n^{m''}}{\partial \mu} = im'' Y_n^{m''} \frac{\partial Y_n^{m'}}{\partial \mu} = im'' P_n^{m''} \frac{dP_n^{m'}}{d\mu} e^{im''\lambda} e^{im'\lambda}$$

Cuando multiplicamos por  $Y_n^{m*}$  e integramos utilizando la condición de ortogonalidad, queda:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 im'' P_n^{m''} P_n^{m'} \frac{dP_n^{m'}}{d\mu} e^{i(m'+m'')\lambda} e^{-im\lambda} d\mu d\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [im'' P_n^{m''} P_n^{m'} \frac{dP_n^{m'}}{d\mu} \int_0^{2\pi} e^{i(m'+m''-m)\lambda} d\lambda] d\mu$$

La integral en  $\lambda$  vale cero salvo para el caso de que se anule el exponente, o sea, cuando  $m = m' + m''$ , caso en el que vale  $2\pi$ . Entonces haciendo primero  $(m'', n'') = (m_1, n_1)$  y  $(m', n') = (m_2, n_2)$  y, después haciendo  $(m'', n'') = (m_2, n_2)$  y  $(m', n') = (m_1, n_1)$  obtenemos los dos sumandos de la expresión de los coeficientes de acoplamiento y la condición para que no se anulen

es, en ambos casos, que  $m = m_1 + m_2$ , o sea, aquellas ondas cuyos números de onda zonales suman el número de onda zonal de la componente en cuestión.

Despejando de la ecuación [V.4] las derivadas de los coeficientes del desarrollo en serie resulta:

$$\frac{d\psi_n^m}{dt} = \frac{2\Omega mi}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} F_n^m \quad [V.7]$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la [IV.8] para las funciones básicas de Fourier. No obstante, los coeficientes de interacción en el caso de la ecuación en coordenadas esféricas son más complicados puesto que la integral encierra funciones de Legendre. No obstante, utilizando los algoritmos dados por las ecuaciones [II.16] y [II.17] pueden calcularse los valores de las integrales de los coeficientes de interacción  $L$  y con éstos el valor de  $F_n^m$ . Una vez conseguido esto para cada paso de tiempo, las ecuaciones [V.7] pueden evaluarse con un esquema de diferencias finitas centradas en el tiempo del tipo "leapfrog" o "salto de rana", resultando:

$$(\psi_n^m)^{t+\Delta t} = (\psi_n^m)^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left( \frac{d\psi_n^m}{dt} \right)^t$$

Una vez obtenidos los nuevos coeficientes obtenemos los valores de cada magnitud sin más que sustituirlos en el desarrollo de la función de corrientes:

$$\psi(\lambda, \mu, t + \Delta t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N (\psi_n^m)^{t+\Delta t} Y_n^m(\lambda, \mu)$$

$$\zeta(\lambda, \mu, t + \Delta t) = - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n(n+1) (\psi_n^m)^{t+\Delta t} Y_n^m(\lambda, \mu)$$

$$u(\lambda, \mu, t + \Delta t) = - \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = - (1 - \mu^2)^{1/2}$$

$$a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N (\psi_n^m)^{t+\Delta t} \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{im\lambda}$$

$$v(\lambda, \mu, \tau + \Delta t) =$$

$$\frac{a}{(1-\mu^2)^{1/2}} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \operatorname{Im}(\psi_n^{m'})^{t+\Delta t} Y_n^m(\lambda, \mu)$$

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

Repitiendo todo el proceso podemos obtener una predicción de estas magnitudes meteorológicas para el período de tiempo que queramos.

Sin embargo, el principal inconveniente de este método es que aumentar el número de componentes espectrales consideradas en el desarrollo en serie de la función de corriente supone aumentar mucho el tiempo de cálculo en el ordenador, ya que el número de operaciones en cada paso de tiempo es del orden de  $N^3$ . Por ejemplo, para un esquema que mantenga valores del número de onda zonal hasta 63 (modelo operativo del CEPPM) cada paso de tiempo requiere del orden de  $10^9$  operaciones de cálculo. Este modelo en particular tiene una resolución espacial análoga a la de uno de puntos de rejilla cuyo paso fuese de alrededor de 200 km.

Por esto resulta prohibitivo en los modelos espectrales, ampliar la resolución para poder representar en ellos los procesos de turbulencia, viscosidad, radiación, etcétera.

Para solventar este inconveniente los modelos espectrales operativos suelen combinarse con esquemas que representan los citados procesos a pequeña escala mediante esquemas de puntos de rejilla. Los resultados de estos esquemas se incorporan como información en los coeficientes de los desarrollos espectrales.

Al igual que ocurría cuando se elegían como funciones básicas las de Fourier, en este caso, la solución truncada también conserva los invariantes integrales de la solución analítica [III.5], o sea, que:

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = a^2 \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt} = -\psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

donde los circunflejos significan magnitudes calculadas con los desarrollos truncados y las barras, como siempre, valores medios globales. Las expresiones espectrales de las tres magnitudes son:

$$\hat{M} = a^2 \mu \nabla^2 \psi = a^2 \mu \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n(n+1) \psi_n^m Y_n^m$$

$$\hat{K} = -\frac{1}{2} \psi \nabla^2 \psi = -\frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n(n+1) \psi_n^m Y_n^{m*}$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2} \zeta^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N n^2(n+1)^2 \psi_n^m \psi_n^{m*}$$

### V.2. Método de la transformada

El método explicado hasta aquí se llama de los coeficientes de interacción y fue el primero que se usó en los modelos espectrales. Como ya hemos dicho antes, necesita mucho tiempo de cálculo, por lo que en 1970 se formuló el llamado "método de la transformada". La ventaja de este método es que en vez de multiplicar dos series como hace el anterior, las suma en puntos de una cierta rejilla espacial, y estos campos se multiplican para cada punto, obteniendo así los términos no lineales de la ecuación barotrópica de la vorticidad. Después hay que transformar estos términos no lineales al espacio espectral. La utilidad de este proceso es que existen métodos de transformación muy eficientes. En coordenadas esféricas se usa para la longitud la transformada de Fourier [II.13.b] y para la latitud las integrales de Legendre [II.13.c], que se evalúan por cuadratura gaussiana.

Los términos no lineales de la ecuación [III.3] pueden escribirse como:

$$F(\mu, \lambda) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{a^2}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \nabla^2 \psi \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \nabla^2 \psi \right) \right] +$$

$$+ \left( -\frac{1}{a^2} \right) \left[ \nabla^2 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} - \nabla^2 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu \partial \lambda} \right] = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \nabla^2 \psi \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \nabla^2 \psi \right) \right] \quad [V.8]$$

Ahora es conveniente definir las siguientes cantidades, que son las componentes  $\lambda$  y  $\phi$  de la velocidad multiplicadas por  $\cos\phi$ :

$$U = -\frac{\cos^2\phi}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad [V.9]$$

Introduciendo estas velocidades en [V.8] queda:

$$F(\mu, \lambda) = -\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( U \cdot \nabla^2 \psi \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( V \cdot \nabla^2 \psi \right) \right] \quad [V.10]$$

Las componentes de la velocidad [V.9] pueden calcularse a partir del desarrollo en serie de armónicos esféricos de la función de corriente [V.1] para puntos de una rejilla de longitud-latitud, y la vorticidad puede obtenerse en los mismos puntos a partir de la ecuación [V.2]. Los productos  $U \nabla^2 \psi$  y  $V \nabla^2 \psi$  se calculan para cada punto de rejilla y los resultados se analizan en  $\lambda$  mediante series de Fourier, resultando las siguientes relaciones:

$$U \nabla^2 \psi = a \sum_{m=-M}^M A_m(\mu) e^{im\lambda} \quad [V.11]$$

$$V \nabla^2 \psi = a \sum_{m=-M}^M B_m(\mu) e^{im\lambda}$$

La transformada de  $F(\mu, \lambda)$  viene dada por:

$$F_n^m = 1/4\pi \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-im\lambda} P_n^m(\mu) \cdot F(\mu, \lambda) \, d\mu d\lambda \quad [V.12]$$

Para realizar la integración en  $\lambda$ , sustituimos [V.11] en [V.10] e insertamos el resultado en [V.12] y queda:

$$F(\mu, \lambda) = -\frac{1}{a} \left[ \frac{a}{1-\mu^2} \sum_{l=-M}^M i l A_l e^{il\lambda} + a \sum_{l=-M}^M \right]$$

$$\frac{dB_l}{d\mu} e^{il\lambda} \Big]; F_n^m = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{i}{1-\mu^2} \sum_{l=-M}^M l A_l e^{il\lambda} e^{-im\lambda} + \sum_{l=-M}^M \frac{dB_l}{d\mu} e^{il\lambda} e^{-im\lambda} \right) d\lambda \right] P_n^m(\mu) \, d\mu$$

Teniendo en cuenta que las funciones de Fourier son ortogonales, todas las integrales de los sumatorios se anularán, salvo la que hace que  $l = m$ , que vale  $2\pi$ . Entonces los  $F_n^m$  quedan:

$$F_n^m = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{im}{1-\mu^2} A_m P_n^m + \frac{dB_m}{d\mu} P_n^m \right] d\mu$$

El segundo término del integrando se puede integrar por partes y queda:

$$F_n^m = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{im}{1-\mu^2} A_m P_n^m - B_m \frac{dP_n^m}{d\mu} \right] d\mu \quad [V.13]$$

donde se ha supuesto que  $B_m = 0$  para  $\mu = \pm 1$  para simplificar la integral.

Puesto que el integrando de [V.13] es un polinomio en  $\mu$ , la integral puede evaluarse por la fórmula de la cuadratura gaussiana (Eliassen y otros 1970). Si llamamos  $Q(\mu_k)$  al integrando, la expresión de  $F_n^m$  queda:

$$F_n^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K G_k^K Q(\mu_k) \quad [V.14]$$

En esta expresión la suma se ejecuta sobre  $K$  valores de  $\mu_k$ , que son las raíces del polinomio de Legendre  $P_K^0$  y  $G_k^K$  son los coeficientes de Gauss correspondientes.

Antes de discutir el proceso para tratar los términos más lineales con más detalle es necesario determinar la relación entre  $N$ ,  $m$  y  $M$ , de la ecuación [V.1]. En la truncación romboidal  $N = M + m$ , de manera que cada modo latitudinal tiene el mismo número de ondas en longitud (para cada  $m$ ,  $n$  va de  $m$  a  $m + M$ , o sea, tiene  $M$  ondas). Con la truncación triangular



$N = M$ , de manera que todas las funciones básicas que tienen la misma escala, o sea el mismo valor de  $b = n \cdot (n + 1)/a^2$ , o se retienen o se eliminan todas ellas. De esta manera, el modo con la escala latitudinal más pequeña es el que tiene la mayor escala longitudinal. Como ya hemos visto, los términos romboidal y triangular se refieren a las áreas encerradas en el espacio  $(m, n)$ .

Para construir los campos [V.11] es necesario obtener antes  $U$  y  $V$  a partir de  $\psi$ .

$$U = \frac{1}{a} \sum_{n=-M}^M \sum_{n=|m|}^{|m|+M+1} U_n^m Y_n^m \quad [V.15]$$

$$V = \frac{1}{a} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{|m|+M} V_n^m Y_n^m$$

Teniendo en cuenta las relaciones siguientes, deducidas directamente de [II.9] y [II.17]:

$$(\mu^2 - 1) \frac{\partial Y_n^m}{\partial \mu} = n \epsilon_{n+1}^m Y_{n+1}^m - (n+1) \epsilon_n^m Y_{n-1}^m \quad [V.16]$$

$$\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = im Y_n^m$$

donde, igual que en (II.17):

$$\epsilon_n^m = \left( \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right)^{1/2}$$

Las expresiones finales para  $U_n^m$  y  $V_n^m$  pueden obtenerse sustituyendo [V.1] y [V.15] en [V.9], usando [V.16] y aplicando la condición de ortogonalidad [II.10.b]:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{a} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N U_n^m Y_n^m = \frac{\cos^2 \phi}{a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = \\ &= -\frac{1 - \mu^2}{a^2} a^2 \cdot \sum_{l=-M}^M \sum_{S=|l|}^{|l|+M} \psi_s^l \frac{\partial Y_s^2}{\partial \mu} = (\mu^2 - 1)a \\ &= a \sum_{l=-M}^M \sum_{S=|l|}^{|l|+M} \psi_s^l \cdot \frac{1}{\mu^2 - 1} [S \epsilon_{S+1}^l Y_{S+1}^l - (S+1) \epsilon_S^l Y_{S-1}^l] = \\ &= a \sum_{l=-M}^M \sum_{S=|l|}^{|l|+M} \psi_s^l \cdot [S \epsilon_{S+1}^l Y_{S+1}^l - (S+1) \epsilon_S^l Y_{S-1}^l] \end{aligned}$$

Multiplicando los dos desarrollos en serie de  $U$  por  $Y_n^{m*}$  e integrando sobre la esfera, resulta que del primer desarrollo sólo queda, lógicamente,  $U_n^m$ . Del primer sumando del otro desarrollo en serie sólo quedará no nulo el término que cumpla  $(s + 1, l) = (n, m)$ , es decir,  $s = n - 1$  y  $l = m$ . Del segundo sumando sólo quedará no nulo el término que haga  $(s - 1, l) = (n, m)$ , es decir,  $s = n + 1$  y  $l = m$ . Por lo tanto resulta.

$$U_n^m = (n - 1) \epsilon_m^n \psi_{n-1}^m - (n + 2) \epsilon_{n+1}^m \psi_{n+1}^m \quad [V.17a]$$

De la misma forma los  $V_n^m$  quedan:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{a^2}{a} \sum_{l=-M}^M \sum_{s=|l|}^{|l|+M} \psi_s^l il Y_s^l = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N V_n^m Y_n^m \end{aligned}$$

Al multiplicar los dos desarrollos en serie por  $Y_n^{m*}$  e integrar sobre la esfera sólo se mantendrá no nulo el que cumpla  $(s, l) = (n, m)$ :

$$V_n^m = im \psi_n^m \quad [V.17b]$$

De la ecuación [V.17a] se deduce que cuando  $(n - 1, m) = (m + M, m)$ ,  $\psi_{n-1}^m = \psi_{|m|}^m \neq 0$ , lo que implica que existirá el  $U_{|m|+M+1}^m$  y será distinto de cero. Por eso el desarrollo de  $U$  en [V.15] se ha extendido un orden por encima de los de  $V$  y  $\psi$ , en [V.15] y [V.1] respectivamente.

Las cantidades  $U$ ,  $V$  y  $\nabla^2 \psi$  se pueden calcular para los puntos  $(\lambda_j = 2\pi j/N, \mu_k = \arcsen \mu_k)$ , donde  $j = 1 \dots N$  y  $k = 1 \dots K$ . Las  $\mu_k$  se llaman latitudes gaussianas. Por ejemplo,  $V(\lambda_j, \mu_k)$  se puede escribir como:

$$V(\lambda_j, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M e^{im\lambda_j} \left[ \sum_{n=|m|}^{|m|+M} im \psi_n^m P_n^m(\mu_k) \right] \quad [V.18]$$

usando [II.6], [V.1] y [V.17b]. Expresiones similares pueden escribirse para  $U(\lambda_j, \mu_k)$  y  $\nabla^2 \psi(\lambda_j,$

$\mu_k$ ). Los sumatorios pueden ejecutarse de modo eficiente usando el método de la transformada rápida de Fourier. El siguiente paso es calcular  $U \cdot \nabla^2 \psi$  y  $V \cdot \nabla^2 \psi$  para cada punto de la rejilla. Después de calcular estos productos se obtienen de las transformadas de Fourier los coeficientes  $A_m$  y  $B_m$  de [V.11] que se usan para calcular los  $F_n^m$  con la expresión [V.13].

Este método de cálculo de los  $F_n^m$  es más eficiente que el de los coeficientes de interacción y requiere mucha menos memoria de ordenador y menos tiempo de cálculo, ya que el número de cálculos en cada paso de tiempo necesario para el método de los coeficientes de interacción es del orden de  $M^5$  mientras que con este método es del orden de  $25M^3$ . Por ejemplo, para el modelo espectral operativo del CEPPM que toma  $M = 63$  la relación de cálculos para cada paso de tiempo entre el método de la transformada y el de los coeficientes de interacción es de 1/160 aproximadamente.

## VI. Conclusiones

Desde hace algunos años se han empezado a buscar métodos alternativos a los de puntos de rejilla para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Uno de estos métodos es el llamado "método espectral". Las ventajas principales de este método son dos: una es que convierte ecuaciones en derivadas parciales de funciones que dependen de varias variables, en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de funciones que sólo dependen del tiempo. La otra ventaja es que las soluciones obtenidas conservan los invariantes integrales de las soluciones analíticas.

En este trabajo se muestra el proceso general de resolución de las ecuaciones en derivadas parciales, y las propiedades básicas de las funciones test usadas más corrientemente, que son las funciones de Fourier y los armónicos esféricos con funciones asociadas de Legendre.

Después, y como ejemplo de aplicación, se ha mostrado el método de resolución de la ecuación barotrópica de la vorticidad tanto en coordena-

das locales (con funciones de Fourier) como en coordenadas esféricas (con armónicos esféricos). En el primero de los casos, se ha demostrado que la solución analítica conserva las tres invariantes integrales de la ecuación, que son el momento angular medio alrededor del eje de la Tierra, la energía cinética media y la vorticidad cuadrática media o "estrofía".

En el caso de las coordenadas esféricas existen dos métodos de resolución "el de coeficientes de interacción" y "el de la transformada". Se han explicado los fundamentos de ambos y las ventajas que tiene el segundo sobre el primero.

## Bibliografía

- ELIASSEN, E.; y otros (1970): "On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields". Institut for Teoretisk Meteorologi. Report. n.º 2. University of Copenhagen.
- ELLSAESSER, H. W. (1966): "Evaluation of spectral versus grid methods of hemispheric numerical weather prediction". *Journal of Appl. Meteor.*, 5, 246-262.
- GAZDAG, J. (1973): "Numerical convective schemes based on accurate computation of space derivatives". *Journal of Computational Physics.*, 13, 100-104.
- HALTINER, G. J.; WILLIAMS, R. (1980): *Numerical prediction and Dynamic Meteorology*. Ed. John Wiley. N.Y. 477 pp.
- HOBSON, E. W. (1931): *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge University Press. Londres. 500 pp.
- HOLTON, R. J. (1972): *An introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, N.Y., 319 pp.
- JARRAUD, M.; GIRARD, C. (1983): "An extensive Quasi-operational comparison between a Spectral and a Grid-point model". *ECMWF Seminar 1983*, 2, 61-111.
- JARRAUD, M.; SIMMONS, A. J. (1983): "The Spectral Technique". *ECMWF Seminar 1983*, 2, 1-59.
- MACHENHAUER, B. (1979): "The Spectral Method". *GARP Publications Series n.º 17*, 2, 124-275.
- ORSZAG, S. A. (1970): "Transform method for calculation of vector-coupled sums: application to the spectral form of the vorticity equation". *Journal of Atmos. Scien.*, 27, 890-895.

PLATZMAN, G. W (1960): "The Spectral form of the Vorticity equation". *Journal of Meteor.*, 17, 635-644.

SILVERMAN, I. (1954): "Planetary Waves in the Atmosphere". *Journal of Meteor.*, 11, 27-34.

NOTA: Después de la realización de este trabajo (mayo de 1985) el CEPPM ha cambiado su modelo de predicción operativo desde el T63 que se menciona aquí al T106. Es decir, que manteniendo el esquema de truncación triangular, retiene ahora las 106 primeras componentes espectrales.