ECUACIONES DIFERENCIALES INTRINSECAS DE UNA CURVA PLANA MOVIL

José Luis López Balaguer
(Sección de Investigación, INM)

\bstract

In this paper are presented equations for moing plane curves in terms of their geometrical nd kinematical invariante (i.e. arc lengthe, curature and speed of propagation). It is also iown that these equations give the full descripon of the motion of a plane curve, in the pre.se sense that any other equation or invariant is consequence of the set here stated.

. Introducción

Se presenta con mucha frecuencia la necesiıd de considerar "movimientos" de figuras geoétricas relacionadas con problemas físicos. Tal el caso, por ejemplo, de las isolíneas que apacen en los mapas meteorológicos describiendo ertos campos variables con el tiempo (presión, mperatura, espesores, etc.), frentes meteoroló- cos o frentes de onda. En todas estas situacios nos enfrentamos a una curva plana que camı su forma y posición con el tiempo, originanasí una familia uniparamétrica de curvas plas a la que llamaremos de modo genérico curmóvil.

Es un hecho bien conocido que una curva plaestá completamente caracterizada por una vable s (su longitud de arco), una función de ella su curvatura), salvo su posición y orientación el plano. La caracterización de una curva móes mucho más compleja, sin embargo, debido recho de que su forma (dada por su curvatucambia con el tiempo, como ocurre también ı su longitud de arco y su posición en el plano. Veremos en la sección 2 que todos estos cambios pueden describirse igualmente de infinitos modos, lo que significa que muchos "movimientos" distintos pueden dar lugar al mismo esquema de curvas; el teorema 2.1 establece la relación general entre todos ellos, destacando como más sencillo geométricamente el efectuado en la dirección normal. A pesar de esto es natural prestar especial atención a los movimientos dados en términos de la longitud de arco como un parámetro fundamental de la curva, tanto desde un punto de vista geométrico como sobre todo físico, junto al hecho de que cualquier otro caso puede reducirse a éste.

Por las razones expuestas en la sección 3, no se puede esperar que el movimiento de la curva pueda ser arbitrario, es decir que su velocidad pueda ser cualquier función de su longitud de arco y del tiempo; en este sentido se deducen dos ecuaciones a que deben satisfacer la curvatura y velocidad con independencia de la posición y orientación iniciales. El teorema 3.1 establece que este es un conjunto completo de ecuaciones, y con ello que la curvatura y velocidad son a su vez un conjunto completo de invariantes, para la descripción de una curva móvil; por este motivo lo llamamos teorema fundamental de la cinemática de las curvas planas. Se sugiere también algunas aplicaciones del mismo.

2. Velocidad de desplazamiento de una curva móvil

Sea $f(x, y, t) = 0$ una ecuación implícita de una curva móvil. Desde un punto de vista meramente geométrico, cualquier curva plana destaca de modo natural una dirección en el plano: la normal a ella en cada uno de sus puntos. Teniendo esto en cuenta, parece natural describir el cambio de la curva con el tiempo como un movimiento de sus puntos en la dirección normal con una cierta velocidad que deberemos determinar. Concretamente, si es $\vec{r}(x_o, y_o, t)$ la trayectoria del punto (x_o, y_o) de la curva en este movimiento ficticio, se deberá verificar en el instante inicial t_o

$$r(x_o, y_o, t_o) = (x_o, y_o)$$
$$f(x_o, y_o, t_o) = 0$$

y en cualquier otro instante

$$f\,[x\,(x_o, y_o, t_o), y(x_o, y_o, t_o), t_o] = 0$$

Si indicamos por $\vec{n}$ el vector unitario normal a la curva, la velocidad del movimiento estará dada obviamente por

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta\, t}\ (x_o, y_{oi}, t) = c\,\vec{n}$$

y así diferenciando respecto a t la última ecuación resulta

$$\frac{\delta f}{\delta t} + c\,\vec{n}\cdot \text{grad } f = 0$$

de manera que

$$c = -\ \frac{1}{1\ \text{grad } f1}\ \frac{\delta f}{\delta t}$$

expresión que determina la velocidad de desplazamiento.

La descripción anterior descansa en la consideración de desplazamientos normales; sin embargo, se pueden considerar también construcciones más generales (véase [1], p. 355), desde luego por razones físicas es conveniente tomar en consideración otras aproximaciones al problema (véase [3]). Consideramos pues un movimiento de los puntos de la curva con trayectorias dadas por la familia de curvas g(x, y, u, t) = o transversales a la dada, esto es tales que:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\delta f}{\delta x} & \dfrac{\delta f}{\delta y} \\ & \\ \dfrac{\delta g}{\delta x} & \dfrac{\delta g}{\delta y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, el movimiento estará también definido por una ecuación paramétrica $\vec{r} = \vec{r}\ (u, t)$, donde

$$f[x(u,t), y(u,t),t] = 0$$
$$g[x(unt), y(u,t),t] = 0$$

En esta descripción más general parece natural adoptar como velocidad de desplazamiento, el vector $\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}(u,t)$, considerada así el parámetro u como una coordenada lagrangiana en el movimiento. En general un cambio del parámetro u que dependa del tiempo, originará una velocidad de desplazamiento distinta cuando se adopte el nuevo parámetro como corrdenada lagrangiana. No es difícil encontrar la relación entre ambas, pues si fuese v = v(u, t) el nuevo parámetro, se tendría:

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}\ (u,t) = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}\ [v(u,t),t] =$$

$$= \frac{\delta \vec{r}}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta t} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}\ (v, t)$$

de donde se deducen fácilmente los siguientes resultados.

Teorema 2.1. Un cambio de parámetro dependiente del tiempo en una curva móvil, sólo modifica la componente tangencial a la curva de la velocidad de desplazamiento; en consecuencia la componente normal es la misma para todos los movimientos ficticios que se consideren para describir la curva móvil. En particular, siempre es posible adoptar un parámetro como coordenada lagrangiana de manera que el movimiento ficticio asociado sea normal.

Este teorema demuestra que no se pierde información si se consideran únicamente movimientos normales, aunque no garantiza que esta sea la descripción más cómoda y clara de una curva móvil, incluso desde un punto de vista meramente cinemético. Debido al significado geométrico fundamental de la longitud de arco s, es natural referir la descripción del movimiento a él, y en consecuencia adoptaremos la definición siguiente:

Definición 2.1. Llamaremos velocidad de desplazamiento de una curva móvil $\vec{r}(s, t)$ al vector

$$\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}(s, t) = \lambda \vec{s} + c\, \vec{n},$$

donde s es la longitud de arco y $\vec{s} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta s}$ es el vector unitario tangente. Las funciones (λ, c) se llaman componentes intrínsecas de $\vec{v}$.

Nótase que la componente tangencial

$$\frac{\delta n}{\delta t} \left| \frac{\delta \vec{r}}{\delta n} \right|$$

de la velocidad de desplazamiento para cualquier otro parámetro lagrangiano u, no es más que su razón de cambio con el tiempo en el movimiento normal, por lo que $-\lambda$ medirá en consecuencia el cambio de la longitud de arco en cada punto de la curva durante ese movimiento.

3. El teorema fundamental

Consideremos ahora en qué medida las dos funciones (λ, s), que supuestamente describen el movimiento de la curva, se pueden elegir arbitrariamente. Puede verse fácilmente por sólo consideraciones geométricas, que deben adoptarse algunas restricciones. En efecto, si cada punto de la curva inicial sufriese un movimiento arbitrario e independiente del de los restantes puntos, no habría razón para esperar que en instantes posteriores los puntos resultantes de estos movimientos estén relacionados de modo que constituyan de nuevo una curva; en consecuencia debe existir algún tipo de restricción en todos estos movimientos individuales que les relacionen entre sí.

En primer lugar, es evidente por la geometría diferencial elemental, que una curva móvil debe satisfacer en todo punto y en todo instante las fórmulas de Frenet-Serret.

$$\frac{\delta \vec{s}}{\delta s} = k\, \vec{n}$$

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta s} = -K \vec{s} \tag{3.1}$$

Por otra parte, de las condiciones

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$
$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$$

resulta

$$\vec{s} \cdot \frac{\delta \vec{s}}{\delta t} = \vec{n} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{s}}{\delta t} \cdot \vec{n} + \vec{s} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} = 0$$

de manera que la variación local con el tiempo de la base de Frenet-Serret $(\vec{s}, \vec{n})$ debe ser de la forma

$$\frac{\delta \vec{s}}{\delta t} = \omega \vec{n}$$

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta t} = \omega \vec{s} \tag{3.2}$$

donde ω es una nueva función que vamos a determinar a continuación. Observemos que por la definición de $\vec{v}$ se debe verificar

$$\frac{\delta \vec{s}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta s}$$

y comparando con la primera ecuación de (3.2), nos da

$$\frac{\delta \lambda}{\delta s} = c\, k$$

$$\omega = \frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k$$

La primera de estas ecuaciones establece una relación entre las funciones λ, c, k como es natural esperar; la segunda determina la variación local con el tiempo de la base de Frenet-Serret en términos de la velocidad de desplazamiento y de la forma de la curva, lo que es de nuevo un resultado natural. Siguiendo el mismo orden de ideas, podemos aún imponer las condiciones

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta \vec{s}}{\delta s}\right) = \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\delta \vec{s}}{\delta t}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta \vec{n}}{\delta s}\right) = \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\delta \vec{n}}{\delta t}\right)$$

y obtenemos con ello la nueva ecuación

$$\frac{\delta k}{\delta t} = \frac{\delta \omega}{\delta s} \tag{3.4}$$

que usando la segunda del grupo (3.3) se puede escribir también

$$\frac{\delta^2 c}{\delta s^2} + \lambda \frac{\delta k}{\delta s} + c\,k^2 = \frac{\delta k}{\delta t} \tag{3.5}$$

Finalmente, podríamos también imponer la condición

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\delta \vec{v}}{\delta t}\right) = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta \vec{v}}{\delta s}\right)$$

pero como demuestra un sencillo cálculo no se obtiene ninguna nueva relación.

Las ecuaciones que acabamos de obtener para las tres funciones λ, c, k son condiciones necesarias para que puedan describir una curva móvil. Si repetimos el proceso anterior con las derivadas de tercer orden de $\vec{s}, \vec{n}, \vec{v}$ no se obienen esencialmente nuevas relaciones, pues resultan ser consecuencia de las anteriores por procesos de diferenciación y manipulación algebraica. Esto sugiere el resultado general siguiente:

Teorema 3.1. Si tres funciones de clase C^2 (esto es, con derivadas continuas hasta el segundo orden) λ, c, k verifican las condiciones

$$\frac{\delta \lambda}{\delta s} = c\,k$$

$$\frac{\delta^2 c}{\delta s^2} + \lambda \frac{\delta k}{\delta s} + c\,k^2 = \frac{\delta k}{\delta t}$$

existe entonces una curva móvil, determinada unívocamente salvo su posición y orientación iniciales (esto es, salvo una traslación, una rotación y una simetría), tal que

i) La variable s es su longitud de arco y t es el tiempo.

ii) La función k es su curvatura.

iii) Las funciones (λ, c) son las componentes intrínsecas de su velocidad de desplazamiento.

Demostración: Consideremos el sistema diferencial para las tres funciones vectoriales $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ siguiente

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta s} = k\,\vec{Y}$$

$$\frac{\delta \vec{Y}}{\delta s} = -k\,\vec{X}$$

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{Z}}{\delta s} = \left(\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k\right)\vec{Y}$$

$$\frac{\delta \vec{Y}}{\delta t} = -\left(\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k\right)\vec{X}$$

$$\frac{\delta \vec{Z}}{\delta t} = \left(\frac{\delta \lambda}{\delta t} - c\,\frac{\delta \lambda}{\delta s} - c\lambda k\right)\vec{X} + \left(\frac{\delta c}{\delta t} + \lambda \frac{\delta c}{\delta s} + \lambda^2 k\right)\vec{Y}$$

Para que este sistema sea completamente integrable (véase [2]), se deben verificar como consecuencia de él las siguientes condiciones de integrabilidad

$$\frac{\delta}{\delta t}(k\vec{Y}) = \frac{\delta}{\delta s}\left[\left(\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k\right)\vec{Y}\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta t}(-k\vec{X}) = \frac{\delta}{\delta s}\left[-\left(\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k\right)\vec{X}\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\left(\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda k\right)\vec{Y}\right] =$$

$$= \frac{\delta}{\delta s}\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\delta t} - c\frac{\delta c}{\delta s} - c\lambda k\right)\vec{X} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta c}{\delta t} + \lambda\frac{\delta c}{\delta s} + \lambda^2 k\right)\vec{Y}\right]$$

que se verifican en nuestro caso debido a las condiciones que satisfacen λ, c, k por hipótesis. Podemos así afirmar que existe una única solución del sistema diferencial que satisface las condiciones iniciales en $(s, t) = (s_o, t_o)$

$$\begin{aligned} &\vec{X}_o \cdot \vec{Y}_o = 0 \\ &\vec{X}_o \cdot \vec{X}_o = \vec{Y}_o \cdot \vec{Y}_o = 1 \\ &\vec{X}_o \cdot \vec{Z}_o = \lambda_o \\ &\vec{Y}_o \cdot \vec{Z}_o = c_o \end{aligned}$$

donde el subíndice "o" significa que tomamos el valor en (s_o, t_o), nótese que las tres primeras condicioanes expresan que inicialmente los vectores $\vec{X}, \vec{Y}$ son ortonormales, mientras que las dos restantes se pueden escribir en la forma

$$\vec{Z}_o = \lambda_o \vec{X}_o + c_o \vec{Y}_o$$

Esta solución satisface, como consecuencia del sistema diferencial, la relación

$$\frac{\delta\vec{X}}{\delta t} = \frac{\delta\vec{Z}}{\delta s}$$

de manera que existe una función $\vec{r}(s, t)$ tal que

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta s} = \vec{X} \qquad \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \vec{Z}$$

Demostremos que $\vec{r}(s, t)$ es la curva que afirma el enunciado del teorema, esto es que su curvatura y velocidad de desplazamiento son las dadas allí. Para ello expresamos las derivadas de las cinco funciones

$$\vec{X}\cdot\vec{X},\ \vec{X}\cdot\vec{Y},\ \vec{Y}\cdot\vec{Y},\ \vec{X}\cdot\vec{Z},\ \vec{Y}\cdot\vec{Z}$$

en términos de ellas mismas con ayuda del sistema diferencial; se llega así a diez relaciones lineales homogéneas

$$\frac{\delta}{\delta s}(\vec{X}\cdot\vec{X}) = L_1(\vec{X}\cdot\vec{X}, \dots, \vec{Y}\cdot\vec{Z}$$

......

$$\frac{\delta}{\delta t}(\vec{Y}\cdot\vec{Z}) = L_{10}(\vec{X}\cdot\vec{X}, \dots, \vec{Y}\cdot\vec{Z})$$

cuya expresión detallada no nos interesa. Podemos considerar estas igualdades como un sistema diferencial para las cinco funciones que estamos considerando, y este nuevo sistema diferencial es completamente integrable como consecuencia de serlo el sistema inicial, lo que por supuesto puede comprobarse también directamente; esto significa que existe una única solución para valores inciales dados. Por otras parte, por substitución directa se comprueba sin dificultad que el conjunto de funciones

$$1,\ 0,\ 1,\ \lambda,\ c$$

es también una solución del sistema; en consecuencia, por la unicidad de las soluciones concluimos que para todo valor de (s, t)

$$\vec{X}\cdot\vec{X} = 1,\ \vec{X}\cdot\vec{Y} = 0,\ \vec{Y}\cdot\vec{Y} = 1,\ \vec{X}\cdot\vec{Z} = \lambda,\ \vec{Y}\cdot\vec{Z} = c$$

Esto prueba que $\vec{Y}$ es el vector normal a las curvas $\vec{r}(s, t)$, considerando t como un parámetro y s como su longitud de arco; que k es su curvatura por la primera ecuación del sistema diferencial inicial, y que $\vec{Z} = \lambda\vec{X} + c\vec{Y}$ es la velocidad de desplazamiento, interpretado t como el tiempo, para la curva móvil $\vec{r}(s, t)$.

Finalmente, sean C_1 y C_2 dos curvas móviles con la misma curvatura k y las mismas componentes intrínsecas (λ, c) de sus velocidades de desplazamiento. En el instante inicial t_0 mediante una traslación geométrica siempre podemos hacer coincidir los puntos de ambas curvas con el parámetro s_0; con una rotación alrededor de este punto, si fuese necesario, podemos hacer coincidir sus vectores tangentes unitarios en ese punto común; por último, mediante una simetría alrededor de esa tangente común, si de nuevo fuese necesario, podemos hacer conincidir sus vectores normales unitarios en ese punto común. Una vez realizadas estas transformaciones, que sólo alteran la posición y orientación en el instante inicial de una de las curvas, ambas deben coincidir ya en todo punto y en todo instante posterior debido a la unicidad de las soluciones del sistema diferencial para un sistema dado de valores iniciales en un solo punto. El teorema está demostrado.

4. Algunas consideraciones generales

El teorema anterior da una descripción completa de una curva plana móvil; esto significa en particular que cualquier invariante geométrico o cinemático de ella que se pueda construir será necesariamente función de los tres (λ, c, k) que la caracterizan, y que cualquier otra ecuación diferencial entre esos invariantes debe ser consecuencia de las dos consideradas en el teorema. Estas observaciones justifican la siguiente definición:

Definición 4.1. Llamaremos ecuaciones intrínsecas de una curva plana móvil, a las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\delta\lambda}{\delta s} = ck$$

$$\frac{\delta^2 c}{\delta s^2} + \lambda \frac{\delta k}{\delta s} + c k^2 = \frac{\delta k}{\delta t}$$

donde (λ, c, k) son funciones de (s, t), y llamaremos teorema fundamental de la cinemática de curvas planas al teorema 3.1.

El teorema que hemos llamado fundamental es el resultado más completo y general que podemos establecer; es, sin embargo interesante considerar el caso particular de los movimientos normales, no sólo por su valor intrínseco en las aplicaciones, sino por que es conveniente hacer algunas consideraciones acerca de la componente λ del resultado anterior. Como ya se indicó en el teorema 2.1, siempre es posible escoger un parámetro u de modo que $\frac{\delta r}{\delta t}(u, t) = c\,\vec{n}$; en esta situación se tiene

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}(s, t) = \frac{\delta s}{\delta t}(u,t)\,\vec{s} + c\,\vec{n}$$

lo que significa que $\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$ (s,t) ya no es la velocidad de propagación del movimiento normal en general. La función $\frac{\delta s}{\delta t}$ determina la razón de cambio con el tiempo de la longitud de arco en el movimiento normal, y con ello la separación o acercamiento relativos de los puntos de la curva en el transcurso del tiempo; ésta es justamente la función $-\lambda$ del teorema. Ahora bien, si ponemos $\mu = \frac{\delta s}{\delta u}$, y razonando del mismo modo que en el apartado anterior, llegamos al conjunto siguiente de ecuaciones

$$\frac{\delta c}{\delta u} = \mu\omega$$

$$\frac{\delta \mu}{\delta t} + \mu\, c\, k = 0$$

$$\frac{\delta \omega}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta t}(\mu\, k)$$

que cuando se escriben en términos de la longitud de arco, se convierten en las ecuaciones intrínsecas, como es natural esperar, y resultan así equivalentes a ellas. Nótese sólo la velocidad de rotación de la base de Frenet-Serret, dada en el caso de la longitud de arco por la función ω, tiene valor distinto; este no debe sorprender en absoluto, pues las velocidades de desplazamiento son distintas en cada una de las descripciones del movimiento de la curva, por tanto esta velocidad de rotación sólo puede emplearse como un expediente de cálculo.

En cualquier caso, las ecuaciones intrínsecas establecen que una vez dada la curvatura (que, recordemos caracteriza en cada instante la curva), la velocidad de desplazamiento es solución de un sistema diferencial de segundo orden y por tanto no puede elegirse de modo arbitrario; este significa que la forma de la curva restringe enormemente sus posibles movimientos. Por otra parte, si la curva móvil es soporte de alguna propiedad física, seguirá siéndolo en el futuro cuando y sólo cuando satisfaga las ecuaciones intrínsecas; en particular, la situación física no podrá mantenerse más allá del instante o el punto donde deje de verificar alguna de esas ecuaciones, que establecen por tanto condiciones necesarias para la persistencia de situaciones fisicas modelizables por curvas.

El teorema fundamental es válido también para familias de curvas que dependan de uno o varios perámetros, pues así ocurre con el teorema de integrabilidad completa empleado en su demostración. Esto significa que las ecuaciones intrínsecas, dependientes de parámetros, servirán igualmente para la caracterización de configuraciones de curvas planas que representan campos de una magnitud física. Si suponemos, por ejemplo, que una familia uniparamétrica de curvas móviles representa el campo de presión, el eje de las dorsales y vaguadas está caracterizado analíticamente por la condición

$$\frac{\delta k}{\delta s}(s,t,\gamma) = 0$$

(s, t, p) = donde p es la presión (parámetro en este caso de la familia de curvas móviles); las ecuaciones intrínsecas en esos puntos se reducen a

$$\frac{\delta \lambda}{\delta s} = ck$$

$$\frac{\delta^2 c}{\delta s^2} + \lambda \frac{\delta k}{\delta s} + c\,k^2 = \frac{\delta k}{\delta t}$$

y son notablemente más simples.

Para finalizar este trabajo señalemos que el teorema fundamental subsiste también para el caso más interesante en términos reales de curvas móviles situadas en una esfera; basta reemplazar la curvatura, por la curvatura geodésica (también llamada curvatura horizontal en Meteorología), sin más que observar que una curva situada enteramente en una esfera tiene curvatura normal constante e igual al inverso del radio de la esfera.

NOTA: El símbolo $\frac{\delta f}{\delta t}$ significa «Derivada parcial de f respecto a t».

5. Referencias

1. NELINSKII, V. A. (1961): "Dynamic Meteorology". The National Science Foundation, Washington D.C.
2. CARTAN, H. (1967): "Formes Différentielles". Hermann, París.
3. FORSYTHE, G. E. (1947): "Speed of propagation of atmospheric waves with changing shape". J. Met., Vol. 4, No. 2, 67-69.