

## EL METODO ESPECTRAL PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. PARTE II: UN EJEMPLO PRACTICO

*José A. García-Moya Zapata.*

C. M. Z. de Palma de Mallorca (INM).

### Abstract

After studying the mathematical base of the Spectral Method and your application to the Barotropic Vorticity Equation in the first part of the article, we think that it would be useful to carry out an example with a simple equation. We have choosed the Non-linear Advection Equation and we have carried out some 24-hours evolutions of  $u(x, t)$  with a time-step of 6 minutes.

### Resumen

Una vez analizado en detalle el fundamento matemático del método espectral y su aplicación a una ecuación de la Dinámica atmosférica (la ecuación barotrópica de la vorticidad) en la primera parte del artículo, hemos creído conveniente realizar un ejemplo práctico con una ecuación sencilla para ilustrar mejor la práctica del método. Hemos elegido la ecuación de advección no lineal y realizado evoluciones a 24 horas de  $u(x, t)$  con un paso de tiempo de 6 minutos.

### I. Introducción

En la primera parte de esta serie de dos artículos (García-Moya, 1985, citado a partir de aquí como GM) se hacía una revisión de los fundamentos matemáticos del método espectral de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, mostrando cuáles eran sus principales ventajas teóricas sobre otros métodos (conservación de los invariantes integrales de la solución analítica, etc.) así como sus inconvenien-

tes prácticos (tiempo de cálculo de ordenador) y la manera en que éstos podían subsanarse parcialmente, lo que hacía que el método espectral fuera uno de los más usados en los modelos de predicción numérica del tiempo a escala sinóptica.

Asimismo, se estudiaban las propiedades más importantes de las funciones básicas que más corrientemente se usan en los desarrollos en serie (funciones de Fourier y funciones asociadas de Legendre). Además, para tratar de dar una idea de cómo funcionaba el método se aplicó a la resolución de la ecuación barotrópica de la vorticidad tanto en coordenadas locales (con funciones de Fourier) como en coordenadas esféricas (tomando como funciones básicas los armónicos esféricos con funciones asociadas de Legendre).

Sin embargo, debido a lo complicado de la ecuación que se resolvía sólo se llegaba a las expresiones teóricas de las ecuaciones que daban las evoluciones temporales de los coeficientes del desarrollo en serie de la solución (IV.6 y V.4, V.5 y V.6 de GM), ya que resultaba muy complicado cualquier intento de aplicación práctica. Sin embargo, conscientes de que un ejemplo práctico, por sencillo que fuera, podría ayudar a comprender mejor la manera de "trabajar" del método espectral, nos planteamos hacer una aplicación a una ecuación lo suficientemente sencilla como para poder llegar a resultados numéricos aun con el microordenador del que disponemos (un Olivetti M-20 con un procesador de 8 bits).

Hemos elegido entonces la ecuación de advección no lineal en una dimensión. Partiendo de

unas determinadas condiciones iniciales hemos hecho predicciones a 24 horas para la función  $u(x, t)$ , resolviendo, por diferencias finitas centradas en el tiempo, las ecuaciones diferenciales ordinarias de los coeficientes  $u_m(x, t)$  del desarrollo en serie de "u".

Hemos realizado aplicaciones reteniendo las 5, 20 y 50 primeras componentes espectrales (sin contar  $m = 0$ ). Pero como el número de operaciones en cada paso de tiempo es del orden de  $M^3$ , nos ha resultado imposible realizar el ejemplo completo para  $M = 50$ ; nos hemos tenido que conformar en este caso con una evolución a 6 horas, debido a la cantidad de tiempo de microordenador que habría consumido el ejercicio completo.

Se han tomado dos funciones distintas como condiciones iniciales, ambas muy sencillas, pero que no son continuas, por lo que las hemos sometido a un análisis espectral y tomado como condición inicial la aproximación espectral que ya sí es continua y derivable en todo el intervalo.

Las citadas funciones iniciales son las representadas en las figuras 1 y 2 que, como vemos, tienen una forma sencilla para no dificultar su análisis espectral.

Antes de detallar los resultados de los ejemplos vamos a estudiar la aplicación del método espectral a la ecuación de advección no lineal en una dimensión.

## II. La ecuación de advección no lineal

La expresión general de la citada ecuación es de la forma:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

donde  $u(x, t)$  se supone que es periódica en la dirección "x" con período  $2\pi/k$  y siendo la condición inicial de la forma  $u(x, 0) = f(x)$ .

Lo primero que tenemos que hacer es establecer las propiedades que tiene que cumplir la solución analítica de la ecuación para comprobar después que la solución espectral las cumple.

Primero, la solución debe ser una función real,

unívoca y continua de la variable independiente "x".

Segundo, la derivada  $\delta u / \delta x$  que aparece en la ecuación diferencial debe estar definida siempre (y, por lo tanto, ser continua). Excepto tal vez por la suposición de que no hay puntos de discontinuidad, estas premisas se justifican porque sólo estamos interesados en soluciones que sean físicamente relevantes. Si hubiera puntos de discontinuidad, la aproximación serviría para obtener, independientemente, soluciones para cada intervalo entre tales puntos y entonces ponderar de alguna manera el valor de la función en los puntos de discontinuidad.

Para el caso lineal de la ecuación de advección es suficiente que "u" satisfaga estas condiciones inicialmente, ya que la solución se propaga a lo largo del eje "X" sin cambio de forma y con velocidad constante, o en otras palabras, porque todas las características son líneas rectas pero con diferentes pendientes (excepto en el caso particular de  $u(x, 0) = f(x) = \text{cte.}$ ), siendo la ecuación del haz de características:

$$x = c \cdot t + x_0$$

Sin embargo, en el caso no lineal que estamos tratando aquí, la forma de "u" cambia con el tiempo, ya que la solución analítica es de la forma  $u(x, t) = f(x - u(x, t) \cdot t)$  y aunque toma valores constantes  $u = u(x_0, 0) = f(x_0)$  a lo largo de las rectas  $x = u(x_0, 0) \cdot t + x_0$ , más pronto o más tarde dos o más características se cruzarán. Para el tiempo  $t = t_b$  en el que ocurre esto por primera vez,  $\delta u / \delta x$  se vuelve infinita en el punto de cruce y después de ese instante la solución se vuelve multivaluada en las cercanías de ese punto. Físicamente, la significación de la solución  $u(x, t) = f(x - u(x, t) \cdot t)$  está, por lo tanto, limitada al intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq t_b$ . Consecuentemente, sólo consideraremos la solución en este intervalo de tiempo y, por lo tanto, supondremos que las condiciones iniciales son lo suficientemente regulares para asegurar las propiedades de "u" antes mencionadas durante todo el intervalo de tiempo. Un ejemplo de cómo influye esta regularidad de las condiciones iniciales en la solución puede verse en Platzman (1964).

La solución analítica de (1) tiene, en el inter-

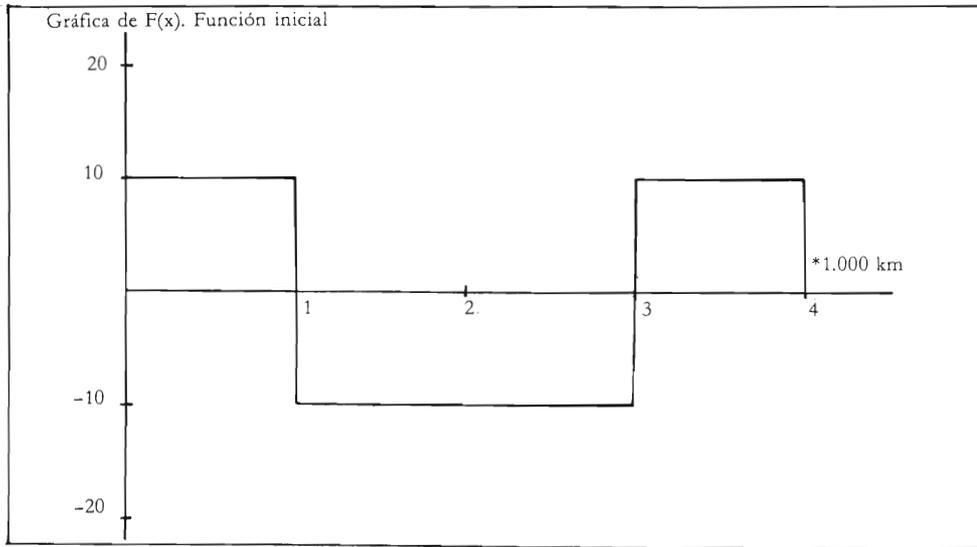


Figura 1.—Representación de la función inicial del Ejemplo A.

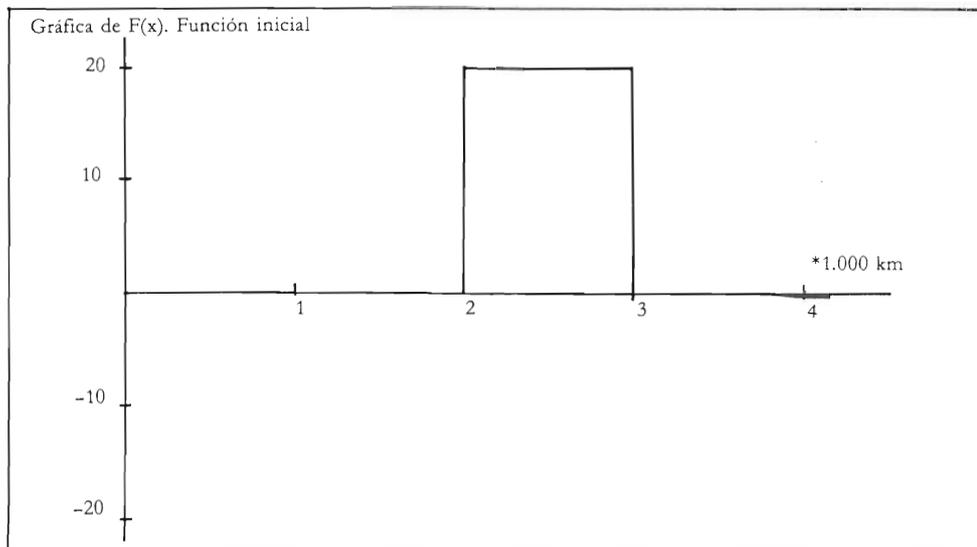


Figura 2.—Función inicial del Ejemplo B.

valo  $0 \leq t \leq t_b$ , la propiedad de conservar invariantes los momentos  $\bar{u}^p$ , o sea:

$$\frac{d}{dp} \bar{u}^p = 0$$

siendo «p» cualquier número natural, y donde la barra significa el valor medio definido por:

$$\bar{(\quad)} = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} (\quad) \cdot dx \quad [3]$$

Este resultado se obtiene de la siguiente manera: después de multiplicar por « $p \cdot u^{(p-1)}$ » la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{\delta}{\delta t} u^p + \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\delta}{\delta x} u^{(p+1)} = 0$$

Como «u» es periódica de periodo  $2\pi/k$  la aplicación del operador (3) da como resultado la ecuación (2).

$$0 = \frac{k}{2\pi} \frac{\delta}{\delta t} \int_0^{(2\pi/k)} u^p \cdot dx + \frac{p}{p+1} \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \frac{\delta}{\delta x} u^{(p+1)} \cdot dx$$

$$\frac{u^{p+1}}{\delta x} \cdot dx = \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} u^p \cdot dx \right] +$$

$$\frac{p}{p+1} \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} d(u^{p+1}) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} u^p \cdot dx \right] = \frac{d}{dt} \bar{u}^p$$

Ya que, si «u» es periódica de periodo  $2\pi/k$ ,  $u^{p+1}$  también lo es y, por lo tanto, la segunda integral se anula.

Además, el paso de la derivada parcial a la derivada total con respecto al tiempo puede hacerse, ya que «u<sup>p</sup>» es función solamente de «x» y de «t» y, por lo tanto, su valor integrado en la variable «x» es sólo función del tiempo y se cumple:

$$\frac{\delta \bar{u}^p}{\delta t} = \frac{d \bar{u}^p}{dt}$$

Dos de estos momentos son importantes, el primero y el segundo, que son proporcionales al momento medio y a la energía cinética media respectivamente.

Para aplicar el método espectral elegiremos como funciones test las de Fourier:

$$\phi_m(x) = e^{imkx} \quad [4]$$

Que, como ya explicamos en la primera parte son soluciones propias de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi + b \cdot \phi = 0 \quad [5]$$

$$b = m^2 \cdot k^2$$

La solución truncada de la ecuación [1] es, entonces:

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{m=-M}^M u_m(t) \cdot e^{imkx} \quad [6]$$

Para que esta solución sea real se tiene que cumplir que:

$$u_{-m}(t) = u_m^*(t) \quad [7]$$

Las funciones test elegidas tienen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} e^{im'kx} \cdot e^{imkx} \cdot dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m' = -m \\ 0 & \text{si } m' \neq -m \end{cases} \quad [8]$$

Ahora bien, aunque la solución espectral satisface la condición de contorno impuesta (condición de periodicidad) no satisface exactamente la ecuación no lineal (con la notación de GM L ( $\bar{F}$ )  $\notin$   $\bar{H}$ ).

Entonces el segundo miembro de [1] queda:

$$F(\bar{u}) = -\bar{u} \cdot \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} = - \left[ \sum_{m_1=-M}^M u_{m_1} \cdot e^{im_1kx} \right] \cdot \left[ \sum_{m_2=-M}^M u_{m_2} \cdot i \cdot m_2 \cdot k \cdot e^{im_2kx} \right] \quad [9]$$

En general,  $F(\bar{u})$  puede ponerse como  $F(\bar{u}) = \sum_{m=-2M}^{2M} F_m \cdot e^{imkx}$ , donde los  $F_m$  son:

$$F_m = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} F(\bar{u}) \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \left[ - \sum_{m_1=-M}^M u_{m_1} \cdot e^{im_1kx} \right] \cdot \left[ \sum_{m_2=-M}^M u_{m_2} \cdot i \cdot m_2 \cdot k \cdot e^{im_2kx} \right] \cdot e^{-imkx} \cdot dx$$

Multiplicando las dos series del integrando y aplicando la condición de ortogonalidad [8], resulta que se anularán todos los términos salvo los que cumplen  $m = m_1 + m_2$ , o sea,  $m_2 = m - m_1$ , y entonces:

$$F_m = -ik \cdot \sum_{m_1=m-M}^M (m - m_1) \cdot u_{m_1} \cdot u_{m-m_1} \quad \text{para } m \geq 0 \quad [10]$$

El primer miembro de la ecuación queda:

$$\frac{\delta \bar{u}}{\delta t} = \sum_{m=-M}^M \frac{du_m}{dt} e^{imkx} \quad [11]$$

De este modo, la sustitución de [6] en [1] da series de Fourier truncadas para diferentes números de ondas, y como las funciones de Fourier son linealmente independientes, los valores de  $du_m/dt$  estarán determinados, quedando un residuo:

$$R(\bar{u}) = \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} \quad [12]$$

que no es cero para todo «x».

Entonces elegimos los valores de  $du_m/dt$  que hacen mínimo el residuo:

$$\int_0^{(2\pi/k)} R(\bar{u}) \cdot e^{-imkx} \cdot dx = 0 \quad \text{para } -M \leq m \leq M \quad [13]$$

Ecuación análoga a la (II.5) de GM.

Usando [12], [11], la expresión de  $F(u)$  [9] y la condición de ortogonalidad [8] obtenemos de [13] las ecuaciones espectrales truncadas:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{(2\pi/k)} R(\bar{u}) \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{m_2=-M}^M \frac{du_{m_2}}{dt} \cdot e^{im_2kx} + \left( - \sum_{m_3=-2M}^{2M} F_{m_3} \cdot e^{im_3kx} \right) \right] \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \\
 &= \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{m_2=-M}^M \frac{du_{m_2}}{dt} \cdot e^{ikx(m_2-m)} \right] \cdot dx - \\
 &\int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{m_3=-2M}^{2M} F_{m_3} \cdot e^{ikx(m_3-m)} \right] \cdot dx = \\
 &= \frac{2\pi}{k} \frac{du_m}{dt} - \frac{2\pi}{k} F_m
 \end{aligned}$$

Ya que la primera integral se anula para todo el sumatorio, salvo para  $m_2 = m$  que vale  $2\pi/k$ , y la segunda se anula, salvo para  $m_3 = m$  que vale también  $2\pi/k$ . O sea, que las ecuaciones espectrales son:

$$\frac{du_m}{dt} = F_m \text{ para } -M \leq m \leq M \quad [14]$$

Teniendo en cuenta la condición [7] basta resolver el sistema para  $0 \leq m \leq M$  y en este caso el valor de  $F_m$  es el dado por la ecuación [10]. De esta expresión se deduce que la evolución temporal del coeficiente de la componente "m" de la serie de Fourier viene dada por la interacción de cada una de las componentes espectrales retenidas con la componente  $m - m_1$ .

Para determinar el residuo mínimo obtenido por este procedimiento multiplicamos cada una de las ecuaciones [14] por  $e^{imkx}$  y las sumamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} &= F(\bar{u}) \text{ con } F(\bar{u}) \\
 &= \sum_{m_2=-M}^M F_{m_2} \cdot e^{im_2kx} \quad [15]
 \end{aligned}$$

Aquí  $F(\bar{u})$  representa lo que en GM llamábamos  $L(\bar{F})$  y que era la serie truncada de  $L(\bar{F})$ . Ya vimos que era necesario hacer esta nueva truncación porque, en general,  $L(\bar{F}) \notin \bar{H}$  y, sin embargo,  $L(\bar{F}) \in \bar{H}$ .

Cuando las expresiones de  $F(\bar{u})$  y  $\overline{F(\bar{u})}$  se sustituyen en [12] queda:

$$R(\bar{u}) = \overline{F(\bar{u})} - F(\bar{u}) = \sum_{M < |m| \leq 2M}^M F_m \cdot e^{imkx} \quad [16]$$

Es decir, que el sumatorio se compone de los dos extremos de la serie de  $F(u)$  (uno entre  $-m \geq -2M$  y  $-m < M$  y otro entre  $m > M$  y  $m \leq 2M$ ).

Una propiedad importante del sistema espectral truncado es que los momentos de primer y segundo orden son invariantes. Como hemos visto, esta es una propiedad de la solución analítica, que además conserva los momentos de órdenes superiores a 2. Sin embargo, esto no es un obstáculo para aceptar la solución espectral, puesto que los dos primeros momentos son los más significativos físicamente hablando, pues son proporcionales al momento medio y a la energía cinética media, respectivamente. Podemos escribir [2] como:

$$p \cdot u^{(p-1)} \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = 0 \quad [17]$$

ya que, como hemos visto, las derivadas parcial y total con respecto al tiempo pueden intercambiarse cuando actúan sobre magnitudes promediadas en "x". En ese caso las barras largas significan resultado de la aplicación del operador [3] sobre la magnitud en cuestión y las barras cortas sobre la función "u" indican que se trata de la serie espectral truncada.

La ecuación [17] se satisface en el caso particular de  $u = \bar{u}$ , ya que:

$$\begin{aligned}
 \partial \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) u &= \bar{u} = -\bar{u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = \\
 F(\bar{u}) - R(\bar{u}) &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - R(\bar{u})
 \end{aligned}$$

Para obtener el resultado anterior hemos utilizado la definición de  $F(u)$ , [12] y [15]. Sustituyendo esto en [17] resulta:

$$p \cdot \bar{u}^{(p-1)} \cdot \left[ \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} - R(\bar{u}) \right] = 0$$

Haciendo  $p = 1$  y  $p = 2$  sucesivamente obtenemos relaciones para los momentos buscados:

$$\begin{aligned}
 p = 1; \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} - R(\bar{u}) &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} - \overline{R(\bar{u})} = \\
 &= \frac{\delta \bar{u}}{dt} - R(\bar{u}) = 0 \\
 p = 2; \frac{\delta \bar{u}^2}{\delta t} - 2\bar{u}R(\bar{u}) &= \frac{\delta \bar{u}^2}{\delta t} - 2\bar{u}R(\bar{u}) = \\
 &= \frac{d\bar{u}^2}{dt} - 2\bar{u}R(\bar{u}) = 0
 \end{aligned}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\frac{\delta \bar{u}}{dt} - R(\bar{u}) = 0 \quad [18]$$

$$\frac{d\bar{u}^2}{dt} - 2 \cdot \bar{u} \cdot R(\bar{u}) = 0 \quad [19]$$

Para calcular  $R(\bar{u})$  aplicaremos el operador [3] a la expresión de  $R(\bar{u})$  [16]:

$$\overline{R(\bar{u})} = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{M < |m| \leq 2M} F_m \cdot e^{imkx} \right] \cdot dx$$

Usando la expresión de  $F_m$  dada en [10] resulta:

$$\begin{aligned}
 \overline{R(\bar{u})} &= \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{M < |m| \leq 2M} (-ikv \cdot \right. \\
 &\left. \sum_{m_1 = m-M}^M (m-m_1) \cdot u_{m_1} \cdot u_{m_1-m_1}) \cdot e^{imkx} \right] dx
 \end{aligned}$$

Los dos sumatorios del integrando son incompatibles puesto que en el primero se obliga a que  $|m| > M$  siempre, y en este caso el segundo sumatorio no existe, por lo que  $\overline{R(\bar{u})}$  [18] = 0, y de se deduce inmediatamente la invariancia del momento de primer orden:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$$

La expresión  $\overline{\bar{u} \cdot R(\bar{u})} = 0$  se deduce directamente de la relación (II.5) de GM demostrada para el caso general. No obstante, vamos a ver con detalle la demostración en este caso, porque puede aclarar bastante los conceptos matemáti-

cos usados en la demostración general de GM. Usando [6] y [16] resulta:

$$\begin{aligned}
 \overline{\bar{u}R(\bar{u})} &= \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{m_2 = -M}^M u_{m_1} e^{im_1 kx} \right] \cdot \\
 &\left[ - \sum F_{m_2} e^{im_2 kx} \right] \cdot dx = \\
 &= \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} \left[ \sum_{m_1 = -M}^M \right. \\
 &\left. \cdot \sum_{M < |m_2| \leq 2M} u_{m_1} \cdot F_{m_2} \cdot e^{ikx(m_1+m_2)} \right] \cdot dx
 \end{aligned}$$

Pero teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad [8] las integrales serán 0 salvo en el caso de que  $m_1 = -m_2$ . Pero esto es imposible porque ambos índices tienen conjuntos disjuntos de variación ( $|m_1| < M$  y  $|m_2| > M$ ), por lo tanto la integral se anulará siempre, o sea  $\overline{\bar{u} \cdot R(\bar{u})} = 0$ . A esto nos referíamos en el apartado II de GM cuando decíamos, para demostrar (II.5), que  $\bar{F} \in \bar{H}$  y  $R(\bar{F}) \in H-\bar{H}$ .

Entonces de [19] se deduce la invariancia del momento de segundo orden:

$$\frac{d\bar{u}^2}{dt} = 0$$

Una vez estudiada en detalle la forma espectral de la ecuación de advección no lineal y demostradas, para este caso particular, las propiedades de la solución espectral, vamos a estudiar los resultados obtenidos en los casos prácticos propuestos en la Introducción.

### III. Resultados de los casos prácticos

Hemos visto en el apartado anterior que para resolver la ecuación de advección no lineal [1], donde  $u(x, t)$  es una función periódica en "x" con período  $2\pi/k$  y siendo la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , el método espectral postula una solución truncada de la forma:

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{m=-M}^M u_m(t) \cdot e^{imkx}$$

donde a los  $u_m(t)$  se les llama componentes espectrales de la solución y, es evidente, que, conocida su evolución temporal, tenemos perfectamente definida  $u(x, t)$ .

Sustituyendo la expresión de "u" en la ecua-

ción y obligando a que el valor cuadrático medio del residuo resultante sea mínimo, obtenemos el sistema [14]:

$$\frac{du_m}{dt} = F_m \quad \text{para } -M \leq m \leq M$$

donde los  $F_m$  vienen dados por la ecuación [10]:

$$F_m = -ik \cdot \sum_{m_1=m-M}^M (m-m_1) \cdot u_{m_1} \cdot u_{m-m_1} \text{ para } m \geq 0$$

que nos basta para resolver el sistema, puesto que ya sabemos que  $u_{-m}(t) = u_m^*(t)$ .

Sin embargo, el sistema de " $u_m$ " está formado por ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y no podemos encontrar soluciones analíticas para él. Por lo tanto, debemos hacer una integración numérica por medio de algún esquema de diferencias finitas, por ejemplo, el "leap frog" o "salto de rana". Con éste esquema, después del primer paso de tiempo, el sistema iterativo es:

$$U_m^{\tau+1} = u_m^{\tau-1} + 2 \cdot \Delta t \cdot F_m^\tau \quad \text{para } 1 \leq m \leq M \text{ y } \tau \geq 2 \quad [20]$$

$$F_m^\tau = -i \cdot k \cdot \sum_{m_1=m-M}^M (m-m_1) \cdot u_{m_1}^\tau \cdot u_{m-m_1}^\tau$$

Como es usual  $u_m^\tau$  es el valor aproximado de  $u_m(t)$  para  $t = \tau \cdot \Delta t$ . Además, como  $F^0 = 0$  para cualquier  $\tau$ ,  $u_m^0(t) = u_m^0 = 0$ .

Los valores de  $u_m^1$  necesarios para el sistema [20] pueden determinarse con dos pasos de tiempo iniciales: uno hacia delante de  $\Delta t/2$  y otro centrado en  $\Delta t/2$  con intervalo de tiempo  $\Delta t$ , o sea:

$$\begin{aligned} u_m^{1/2} &= u_m^0 + (\Delta t/2) \cdot F_m^0 \\ &\text{para } 1 \leq \mu \leq M \quad [21] \\ u_m^1 &= u_m^0 + \Delta t \cdot F_m^{1/2} \end{aligned}$$

En cuanto a la estabilidad local es, normalmente, suficiente usar un paso de tiempo que satisfaga el criterio de estabilidad correspondiente al sistema lineal. En los ejemplos ejecutados aquí hemos tomado un paso de tiempo de 6 minutos siguiendo a Wiin-Nielsen (1974).

La conservación del segundo momento o de la energía cinética media asegura la estabilidad computacional absoluta, puesto que la magnitud

de la solución está necesariamente acotada. Realmente la energía cinética media está sólo cuasi-conservada si se introduce una discretización en el tiempo. Sin embargo, los errores de truncación son, normalmente, pequeños.

En cuanto a la convergencia de la solución numérica a la solución analítica, no se puede probar. Sin embargo, esto mismo ocurre para otros métodos numéricos por lo que el método espectral sigue siendo válido.

Como ya dijimos en la Introducción, para mostrar cómo funciona el método espectral en la práctica, hemos resuelto dos ejemplos que sólo difieren en la forma de la condición inicial  $f(x)$ , ya que los parámetros son los mismos en ambos casos, a saber,  $\Delta t = 6 \text{ min} = 360 \text{ seg}$ , la longitud de onda de la periodicidad  $L = 2\pi/k = 4.000 \text{ Km} = 4 \cdot 10^6 \text{ m}$  y el tiempo total de la evolución de  $u(x, t)$  es de 24 horas, lo que significa 240 iteraciones en el tiempo.

En cuanto a las componentes espectrales retenidas ( $M$ ), quisimos hacer los ejemplos para  $M = 5, 20$  y  $50$  (sin tener en cuenta  $m = 0$ ), pero debido a la lentitud de cálculos del microordenador usado (Olivetti M-20 con un procesador de 8 bits) tuvimos que renunciar al caso de  $M = 50$  (hubiera tardado unas 18 horas en realizar la evolución a 24 horas) y conformarnos con obtener los análisis espectrales de las funciones iniciales y la evolución a 6 horas en el caso del ejemplo A.

Una vez hecho el análisis espectral de la función inicial  $f(x)$ , o sea, una vez calculados los  $u_m^0$ , tanto sus partes reales como imaginarias, las expresiones usadas en ambos ejemplos son las mismas. El camino seguido en la iteración para  $1 \leq m \leq M$  es:

1.—Cálculo de los  $F_m^0$ :

$$\text{Re}(F_m^0) = k \cdot \sum_{m_1=m-M}^M (m-m_1) \cdot [\text{Re}(u_{m_1}^0) \cdot \text{Im}(u_{m-m_1}^0) + \text{Im}(u_{m_1}^0) \cdot \text{Re}(u_{m-m_1}^0)]$$

$$\text{Im}(F_m^0) = -k \cdot \sum_{m_1=m-1}^M (m-m_1) \cdot [\text{Re}(u_{m-m_1}^0) \cdot \text{Re}(u_{m_1}^0) - \text{Im}(u_{m-m_1}^0) \cdot \text{Im}(u_{m_1}^0)] \quad [22]$$

2.—Cálculo de los  $u_m^{1/2}$ :

$$\text{Re}(u_m^{1/2}) = \text{Re}(u_m^0) + (\Delta t/2) \cdot \text{Re}(F_m^0)$$

$$\text{Im}(u_m^{1/2}) = \text{Im}(u_m^0) + (\Delta t/2) \cdot \text{Im}(F_m^0)$$

3.—Cálculo de los  $F_m^{1/2}$  con expresiones análogas a [22].

4.—Cálculo de los  $u^1_m$ :

$$\text{Re}(u^1_m) = \text{Re}(u^0_m) + \Delta t \cdot \text{Re}(F^{1/2}_m)$$

$$\text{Im}(u^1_m) = \text{Im}(u^0_m) + \Delta t \cdot \text{Im}(F^{1/2}_m)$$

5.—A partir de aquí se repite el proceso iterativo para  $\tau \geq 2$ , con el cálculo de los  $F^{\tau}_m$ :

$$\text{Re}(F^{\tau}_m) = k \cdot \sum_{m^1=m-M}^M (m - m^1) \cdot [\text{Re}(u^{\tau}_{m^1}) \cdot \text{Im}(u^{\tau}_{m+m^1}) + \text{Im}(u^{\tau}_{m^1}) \cdot \text{Re}(u^{\tau}_{m-m^1})]$$

[23]

$$\text{Im}(F^{\tau}_m) = k \cdot \sum_{m^1=m-M}^M (m - m^1) \cdot [\text{Re}(u^{\tau}_{m^1}) \cdot \text{Re}(u^{\tau}_{m-m^1}) - \text{Im}(u^{\tau}_{m^1}) \cdot \text{Im}(u^{\tau}_{m-m^1})]$$

6.—El cálculo de los  $u^{\tau+1}_m$

$$\text{Re}(u^{\tau+1}_m) = \text{Re}(u^{\tau}_m) + 2 \cdot \Delta t \cdot \text{Re}(F^{\tau}_m)$$

[24]

$$\text{Im}(u^{\tau+1}_m) = \text{Im}(u^{\tau}_m) + 2 \cdot \Delta t \cdot \text{Im}(F^{\tau}_m)$$

7.—Y el cálculo de  $u(x, t)$ :

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{m=-M}^M u^{\tau}_m \cdot e^{imkx} = 2 \cdot \sum_{m=1}^M [\text{Re}(u^{\tau}_m) \cdot \cos(mkx) - \text{Im}(u^{\tau}_m) \cdot \sin(mkx)]$$

$M = 1$

Después de detallar el proceso de cálculo iterativo vamos a mostrar los resultados obtenidos en los dos ejemplos ejecutados.

Ejemplo A.—La función  $f(x)$  elegida como condición inicial es la representada en la figura 1 y que se define como:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 20 & \text{si } 2.000 \leq x \leq 3.000 \\ 0 & \text{si } x < 2.000 \text{ ó } x > 3.000 \end{cases}$$

Físicamente, esta condición inicial podría representar una corriente de fluido de velocidad constante y límites ideales. Como esta función no es continua ni derivable en el intervalo de "x" elegido, vamos a calcular su representación espectral aproximada y usaremos ésta como condición inicial. Usando la expresión [6] de  $u(x, t)$  para  $t = 0$  resulta:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{m^1=-M}^M u_{m^1} \cdot e^{im^1kx}$$

Multiplicando ambos miembros por  $e^{-imkx}$  y usando la condición de ortogonalidad [8], resulta:

$$u^0_m = u_m(0) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} f(x) \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \frac{k}{2\pi} \int_a^b 20 \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \frac{20}{4 \cdot 10^6} \cdot \left[ \frac{e^{-imkx}}{-imk} \right]_a^b =$$

$$= \frac{20 \cdot i}{4 \cdot 10^6 \cdot m \cdot (2\pi/4 \cdot 10^6)} \cdot [e^{-imkx}]_a^b$$

siendo  $a = 2 \cdot 10^6$  y  $b = 3 \cdot 10^6$  los límites de integración. Separando partes reales e imaginarias y teniendo en cuenta que  $\text{Re}(u^0_m) = \text{Im}(u^0_m) = 0$  resulta para  $1 \leq m \leq M$ :

$$\text{Re}(u^0_m) = \frac{10}{\pi m} \cdot [\text{sen}(\frac{3\pi m}{2}) - \text{sen}(\pi m)]$$

$$\text{Im}(u^0_m) = \frac{10}{\pi m} \cdot [\text{cos}(\frac{3\pi m}{2}) - \text{cos}(\pi m)]$$

Las aproximaciones espectrales de  $f(x)$  para  $M = 5$ ,  $M = 20$  y  $M = 50$  se presentan en la figura 3. Como era de esperar, a mayor número de componentes espectrales retenidas mejor representación de la función. Sin embargo, hemos de observar que el paso de  $M = 20$  a  $M = 50$  no produce una mejora de los resultados que justifique suficientemente el gran aumento en tiempo de cálculo que se produce.

Una vez tomadas estas aproximaciones espectrales como condición inicial, se han ejecutado las evoluciones a 24 horas para los casos de  $M = 5$  y  $M = 20$  y a 6 horas para el caso de  $M = 50$ , los resultados obtenidos cada 6 horas se presentan en las figuras 4 a 7 ambas inclusive. En ellas puede observarse que la evolución de la función "u" permanece siempre acotada por la invariancia de los momentos de primer y segundo orden (como demostramos en el apartado anterior).

También se observa una gran mejora en la representación de los detalles al pasar de  $M = 5$  a  $M = 20$  y una pequeña mejora que, como ya hemos dicho antes, no justifica el gran aumento en tiempo de cálculo, al considerar el caso de  $M = 50$ . Lo que para el caso de  $M = 5$  parece ser una división del máximo en dos prácticamente iguales, para  $M = 20$  resulta ser un frenado brusco de la parte izquierda de la corriente debido al intercambio de momento en la dirección de las "x" decrecientes.

Ejemplo B.—En este caso la función  $f(x)$  elegida como condición inicial es la representada en la figura 2, cuya definición es:

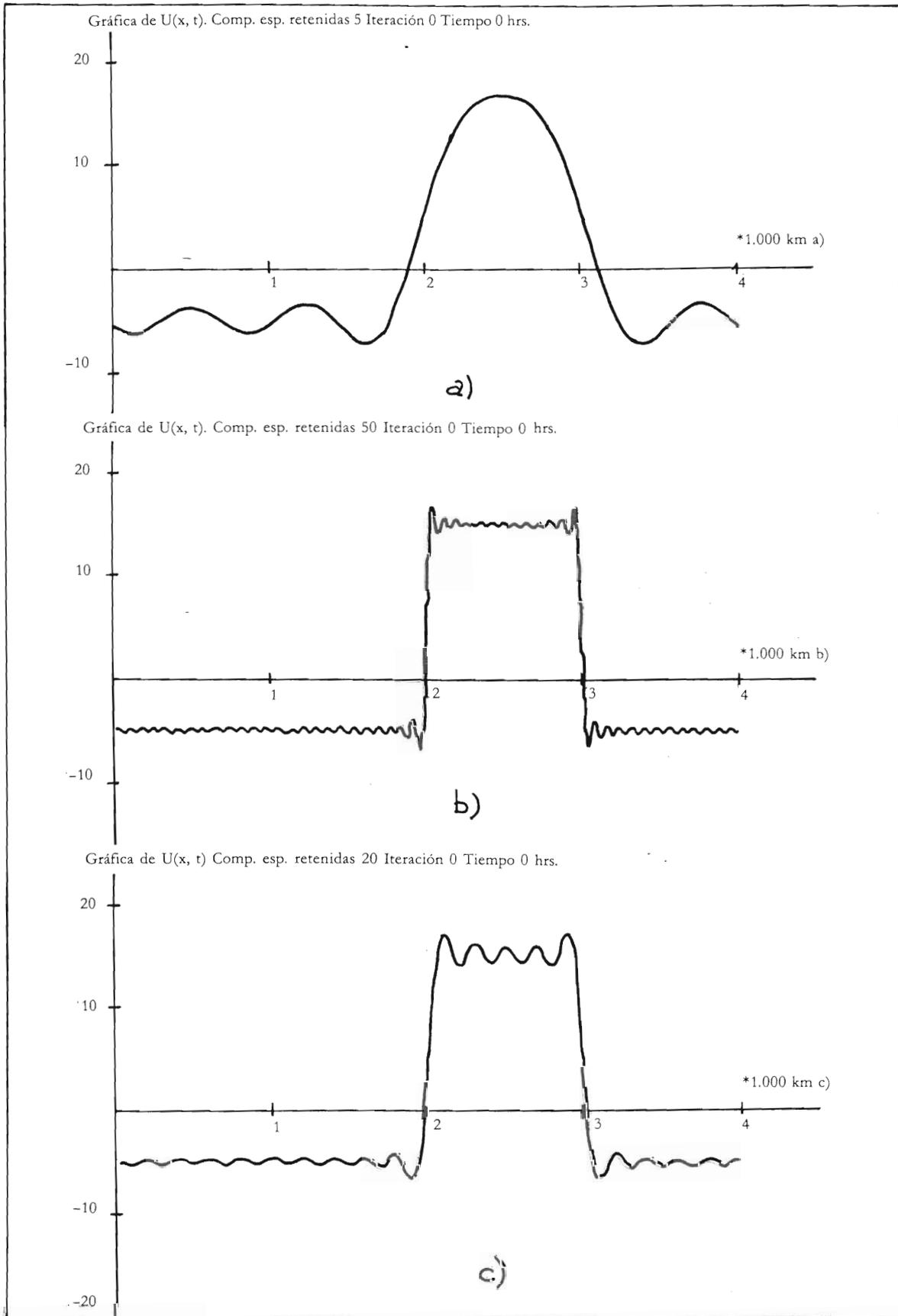


Figura 3.—Representación de  $u(x, 0)$  para: a)  $M=5$ , b)  $M=20$  y c)  $M=50$ .

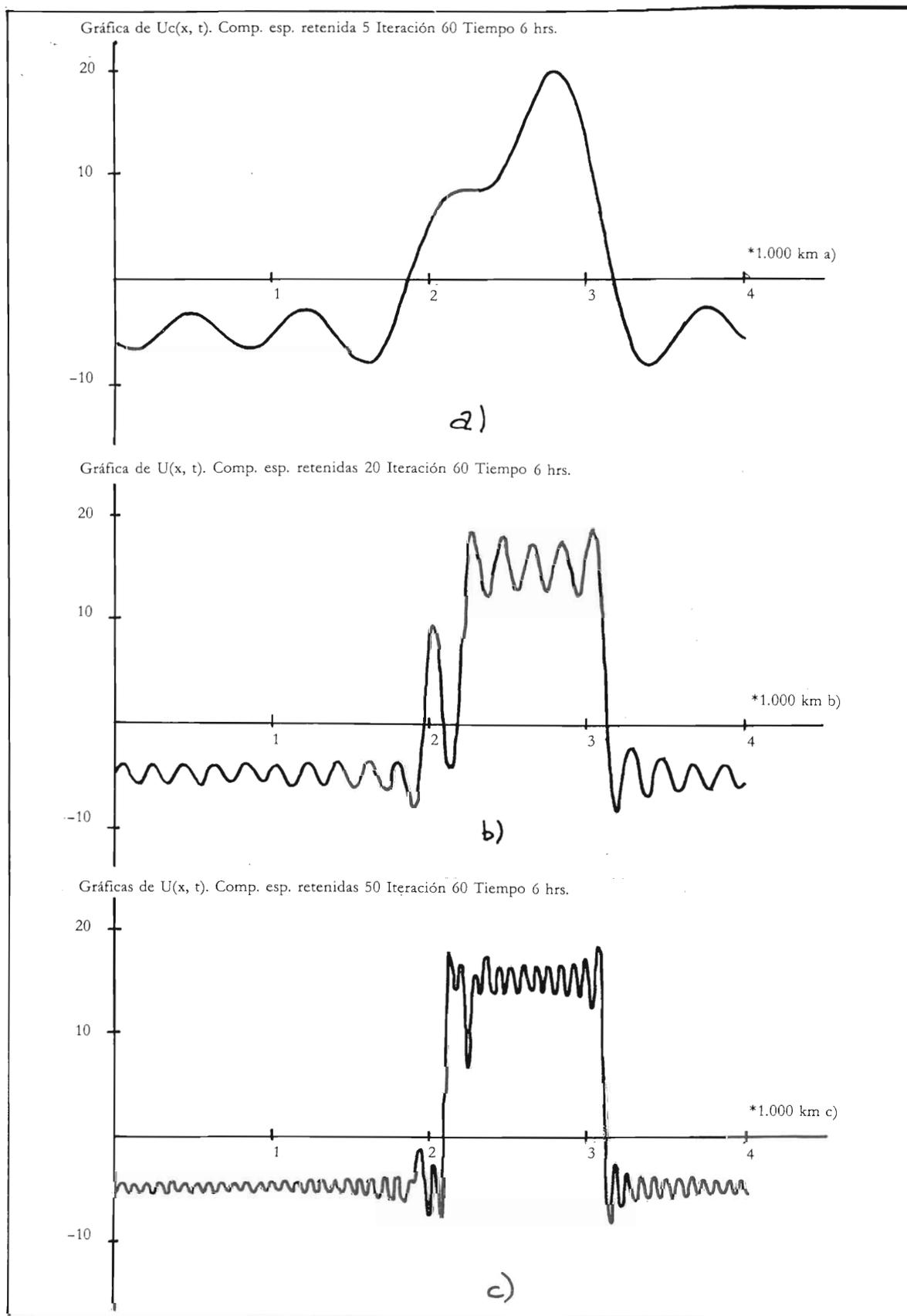


Figura 4.—Igual que la figura 3 para  $t=6$  horas.

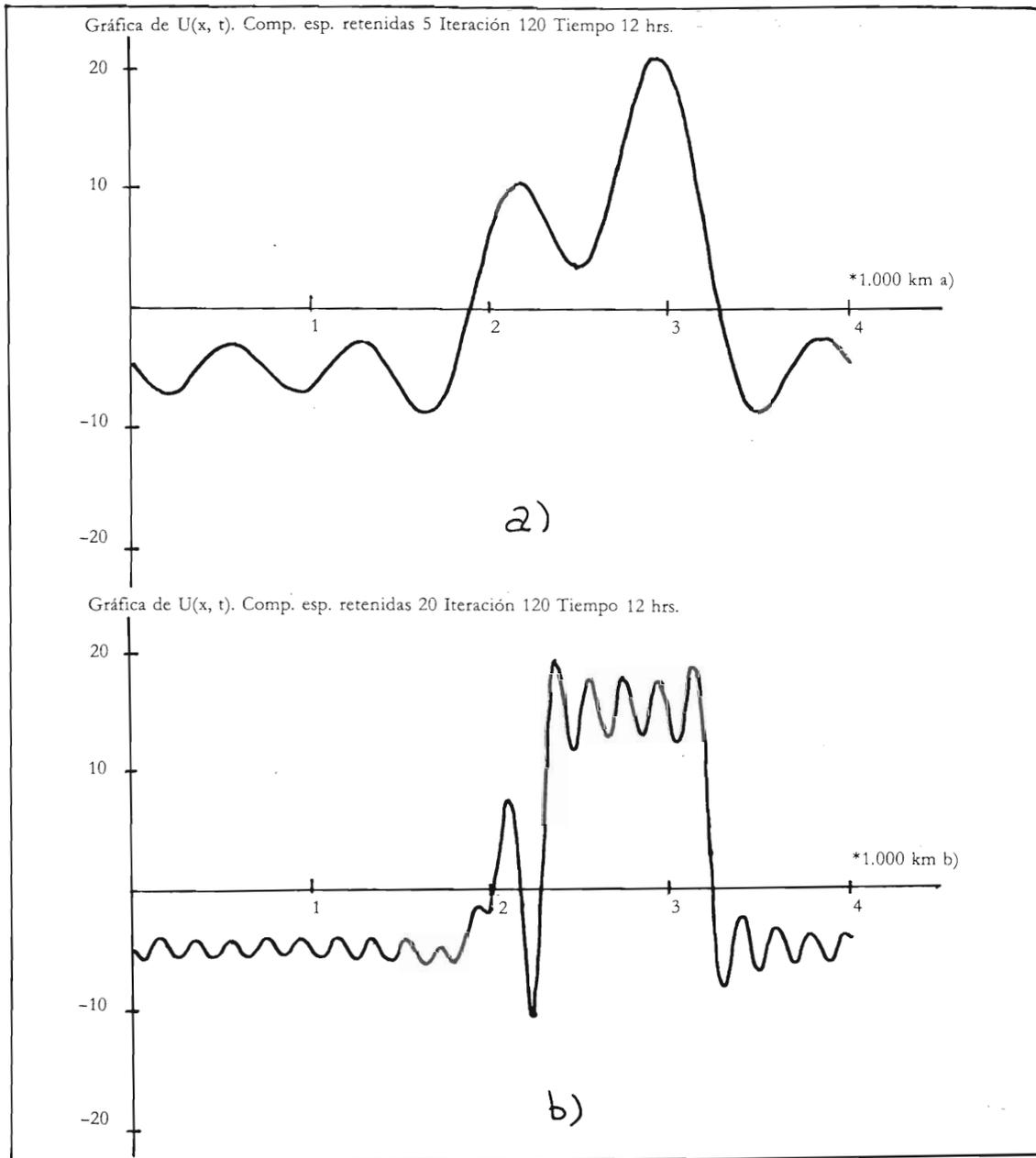


Figura 5.—Gráfica de  $u(x, t)$  para  $t=12$  horas. a)  $M=5$  y b)  $M=20$ .

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} -10 & \text{si } 1.000 \leq x \leq 3.000 \\ 10 & \text{si } x < 1.000 \text{ ó } x > 3.000 \end{cases}$$

Siguiendo un camino análogo al del ejemplo A podemos calcular la aproximación espectral de la función inicial:

$$u_m^0 = \frac{k}{2\pi} \int_0^{(2\pi/k)} f(x) \cdot e^{-imkx} \cdot dx = \frac{k}{2\pi}$$

$$\cdot \left[ \int_0^a 10 \cdot e^{-imkx} \cdot dx + \int_a^b (-10) \cdot e^{-imkx} \cdot dx + \right.$$

$$\left. \int_0^{(2\pi/k)} 10 \cdot e^{-imkx} \cdot dx \right] = \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-imk)}$$

$$\cdot \left[ e^{-imkx} \Big|_0^a - e^{-imkx} \Big|_a^b + e^{-imkx} \Big|_0^{(2\pi/k)} \right]$$

donde  $a = 10^6$  y  $b = 3 \cdot 10^6$ . Separando partes reales e imaginarias queda:

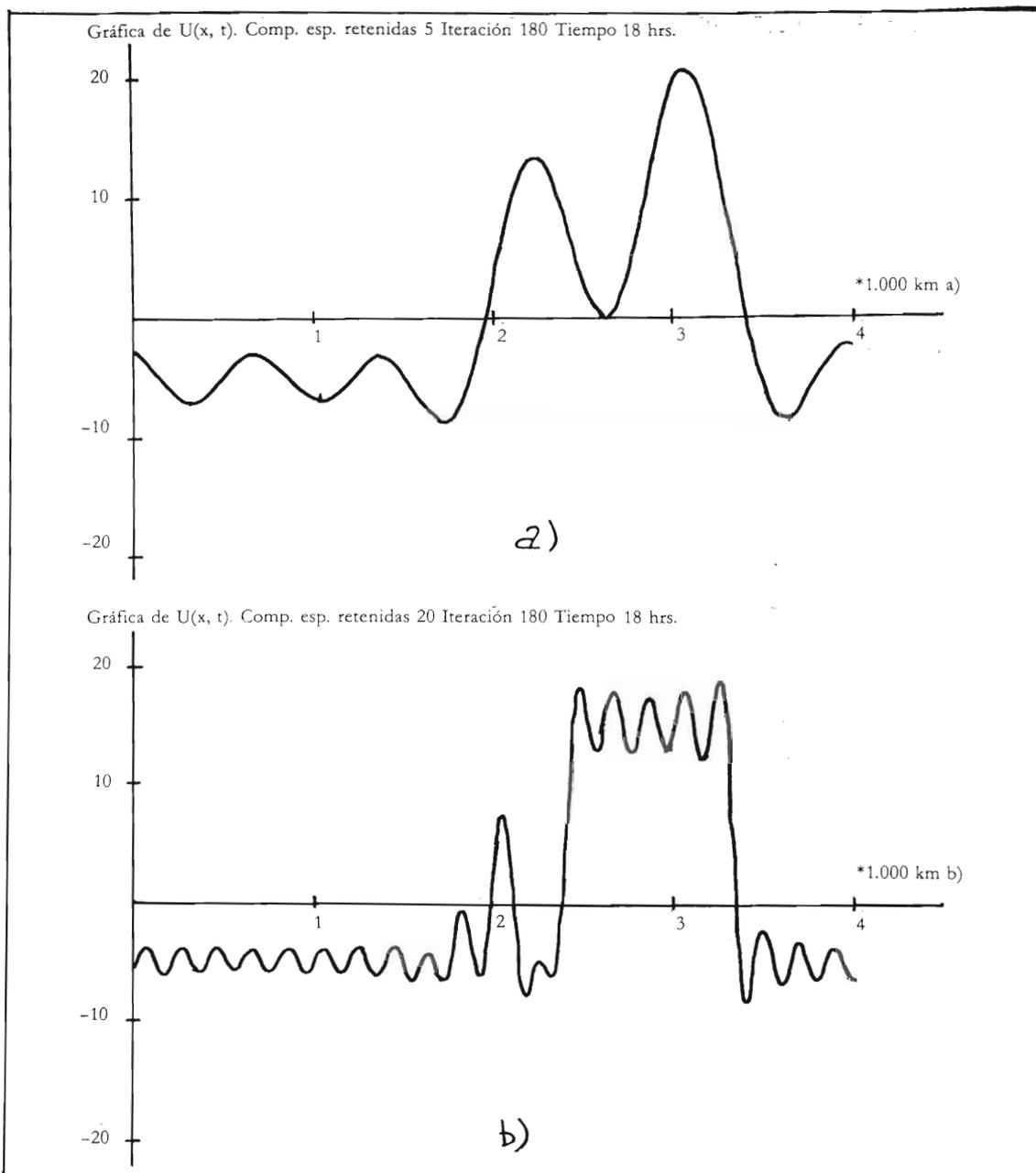


Figura 6.—Idem para  $t=18$  horas.

$$\begin{aligned} \text{Re}(u_m^\circ) = & \frac{5}{\pi m} \cdot \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi m}{2} \right) - \text{sen} \left( \frac{3\pi m}{2} \right) + \right. \\ & + \text{sen} \left( \frac{\pi m}{2} \right) + \text{sen} (2\pi m) - \\ & \left. - \text{sen} \left( \frac{3\pi m}{2} \right) \right] = \frac{5}{\pi m} \cdot \\ & \cdot \left[ 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi m}{2} \right) + \text{sen} (2\pi m) - 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{3\pi m}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(u_m^\circ) = & \frac{5}{\pi m} \cdot \left[ 2 \cdot \cos \left( \frac{\pi m}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \cos (2\pi m) - 2 \cdot \cos \left( \frac{3\pi m}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Las aproximaciones espectrales de la función inicial se muestran en la figura 8 y las evoluciones temporales de “u” en las figuras 9 a 12 ambas inclusive.

Análogamente a lo que pasaba en el ejemplo

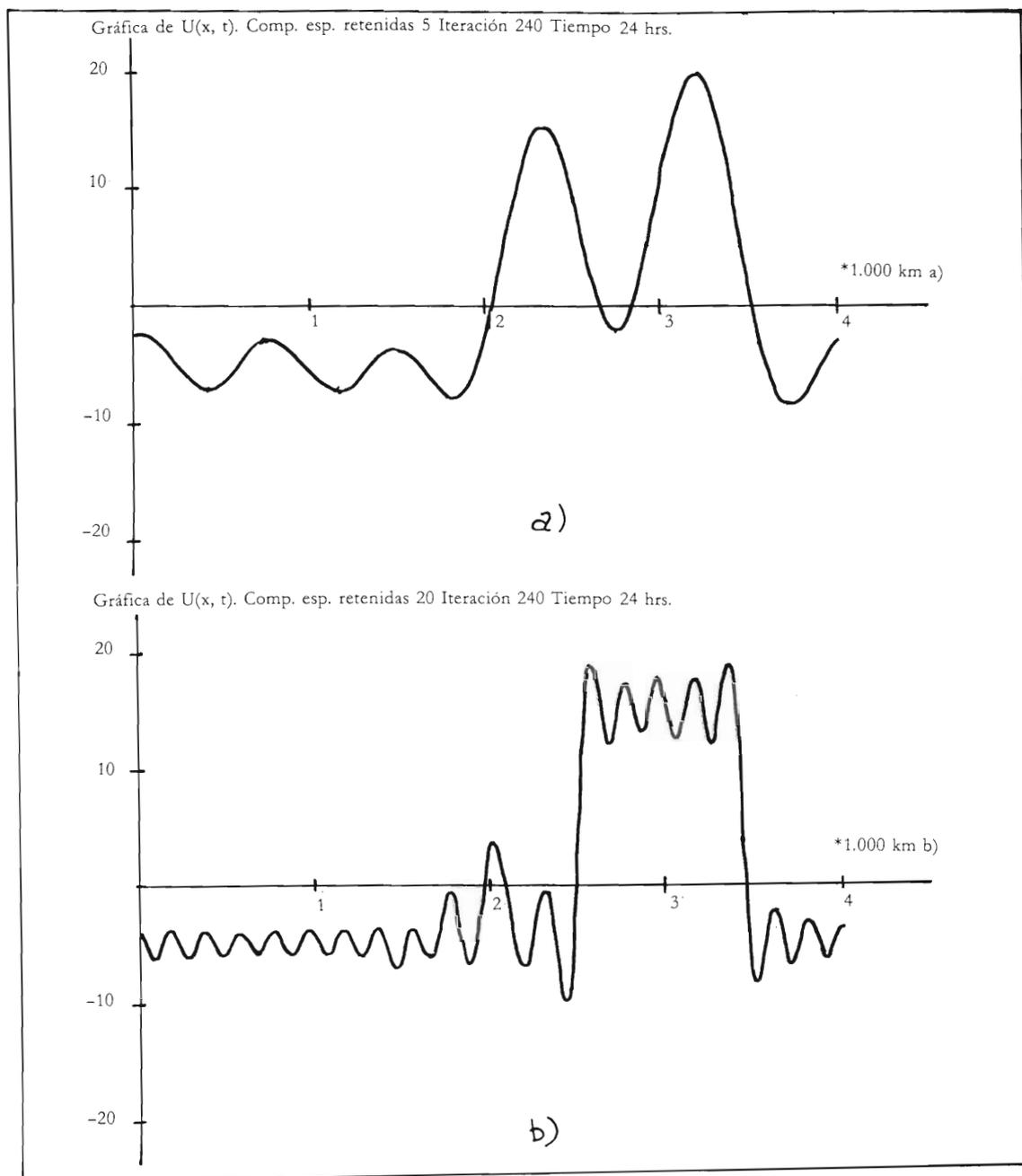


Figura 7.—Idem para  $t=24$  horas.

anterior el intercambio de momento se produce a la izquierda del chorro principal, o sea, en el lado de vorticidad ciclónica que, como ya sabemos, es donde se suelen inestabilizar las ondas atmosféricas.

#### IV. Conclusiones

Después del tratamiento exhaustivo del aparato matemático del método espectral y de su aplicación a una ecuación de la Dinámica atmos-

férica (la ecuación barotrópica de la vorticidad) realizado en la primera parte de este artículo (GM), nos pareció adecuado aplicar el método a una ecuación mucho más sencilla, lo que nos permitiría mostrar con detalle la aplicación práctica del método y demostrar en este caso particular las propiedades generales demostradas en abstracto en el apartado II de GM.

Elegimos como ecuación la de advección no lineal ya que, aunque es de forma muy simple,

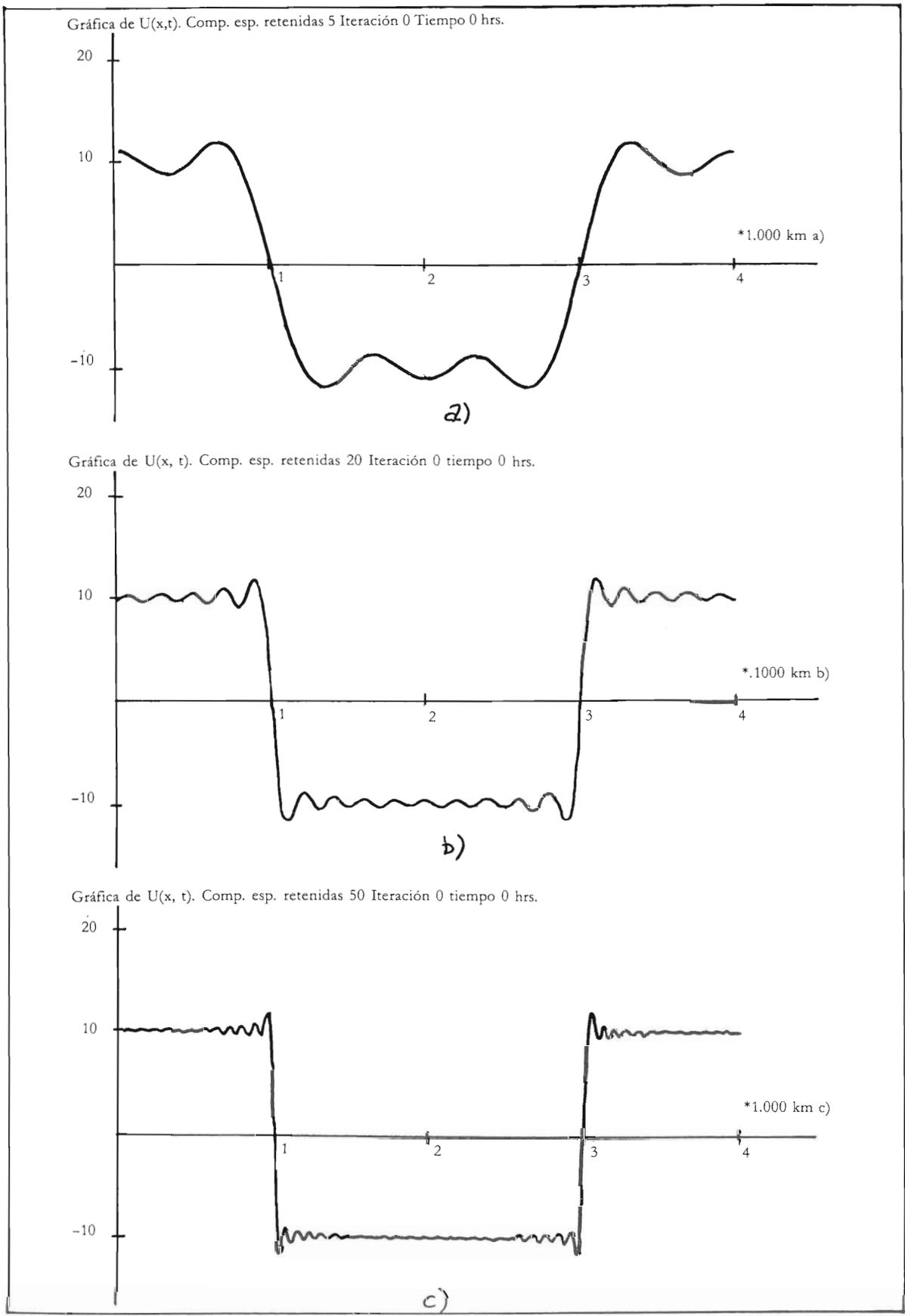


Figura 8.—Representación de  $u(x, 0)$  para el Ejemplo B. a)  $M=5$ , b)  $M=20$  y c)  $M=50$ .

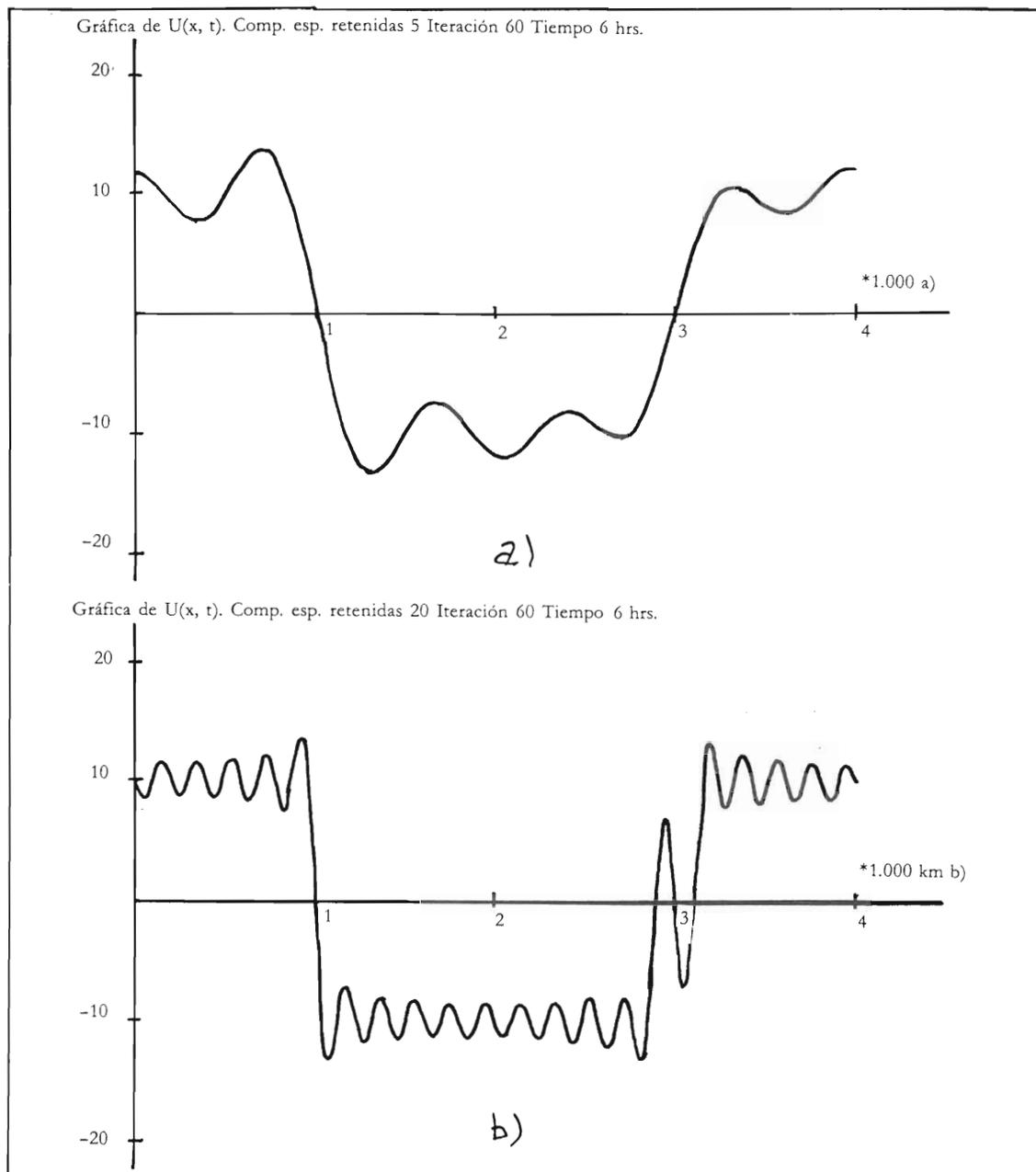


Figura 9.—Igual que la figura 8 para  $t=6$  horas. a)  $M=5$  y b)  $M=20$ .

es, sin embargo, no lineal y ello nos permitiría ver cómo influyen las interacciones entre las distintas componentes ondulatorias del desarrollo espectral en la evolución temporal de los coeficientes  $u_m(t)$ .

Después de una descripción detallada de la aplicación del método a esta ecuación (llegando incluso al desarrollo de las ecuaciones iterativas que se pueden usar en el programa de ordenador) y de la demostración de la conservación,

con la solución espectral, de los momentos medios de primer y segundo orden, proporcionales, respectivamente, al momento medio y a la energía cinética media, hemos realizado dos ejercicios, con dos funciones iniciales distintas (figuras 1 y 2), consistentes en la evolución a 24 horas de la función  $u(x, t)$ , con un paso de tiempo de 6 minutos y una longitud de onda de 4.000 Km. En cada caso se ha realizado el ejercicio con 5 y 20 componentes espectrales retenidas.

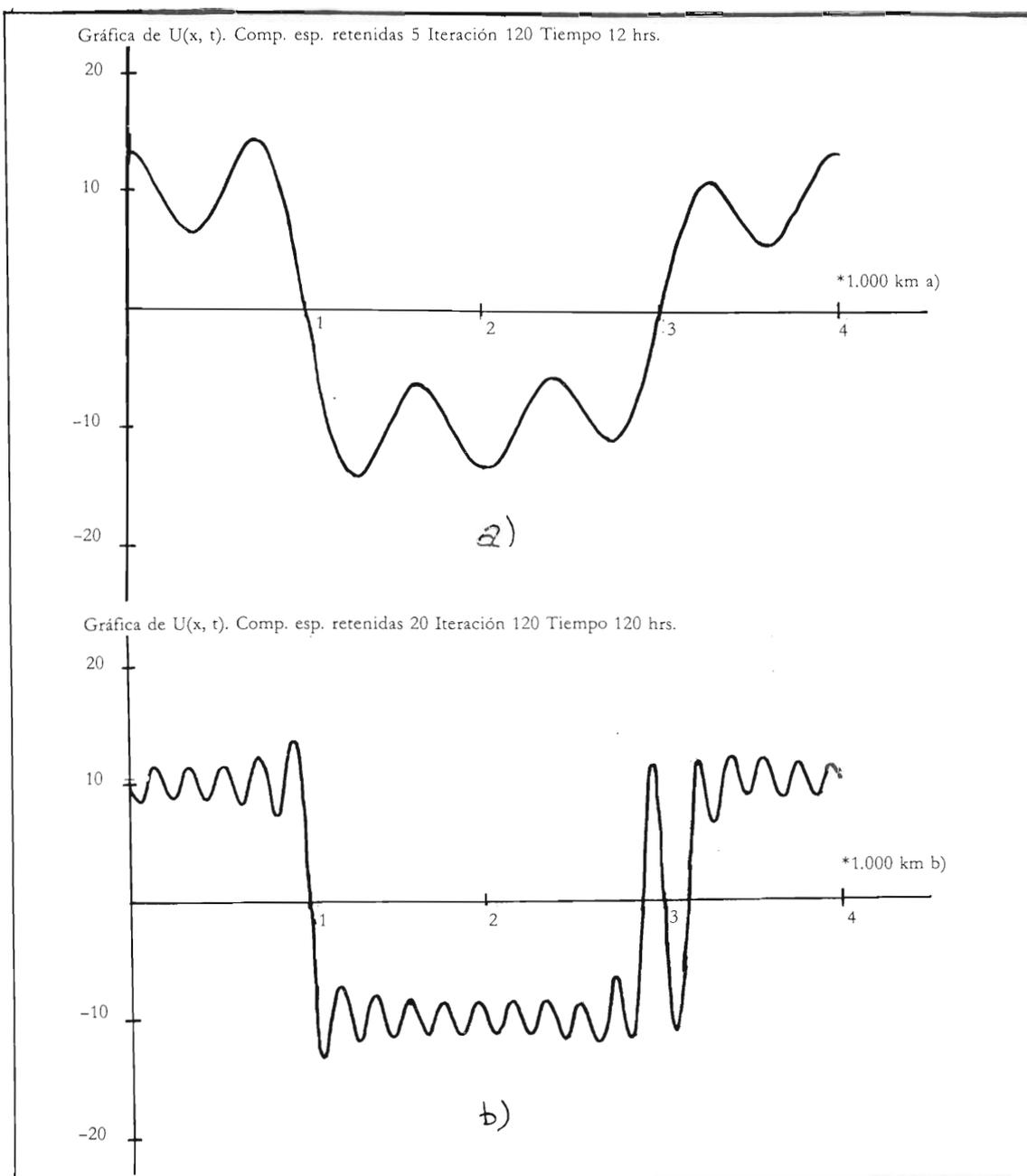


Figura 10.—Idem para  $t=12$  horas.

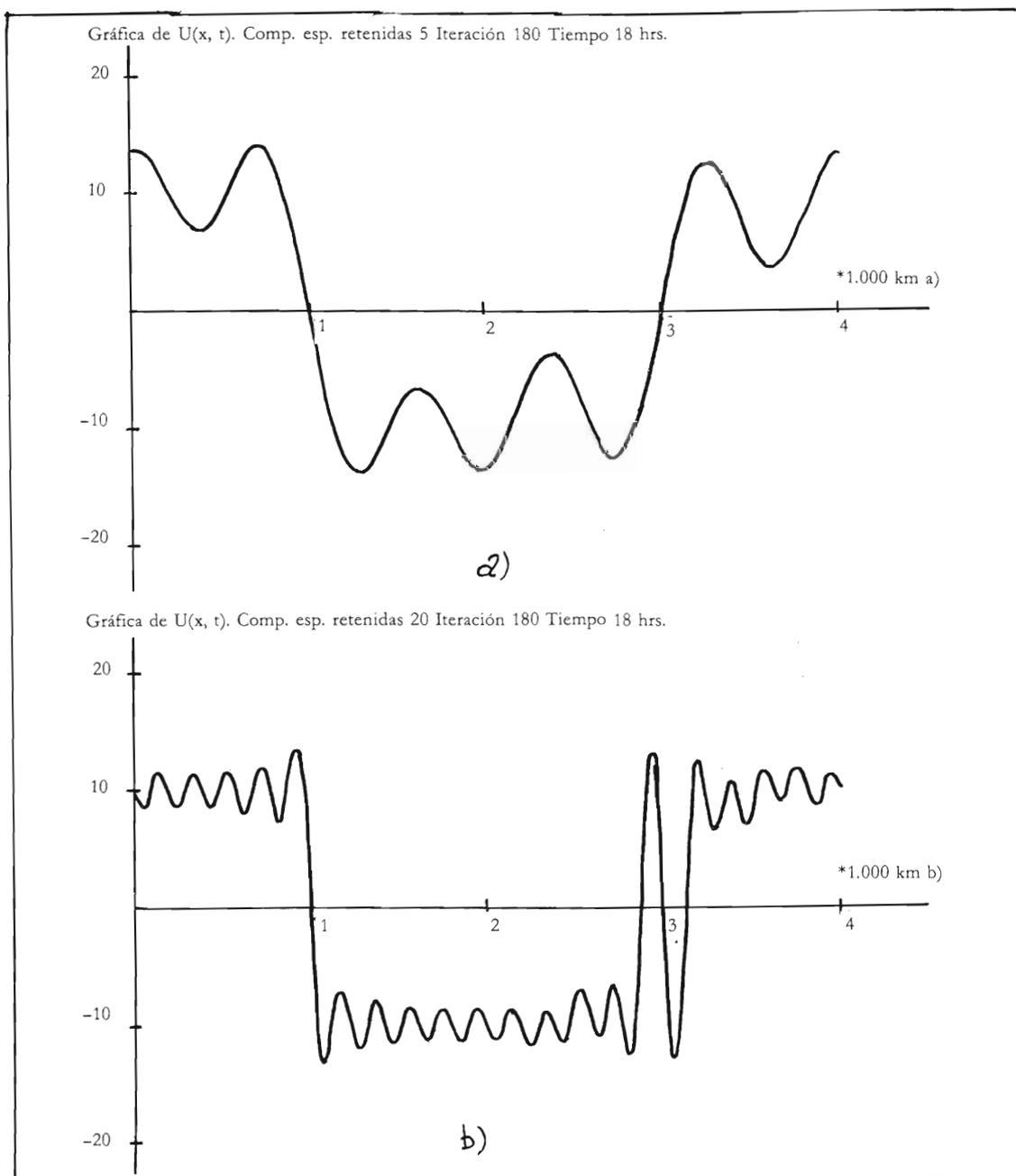


Figura 11.—Idem para  $t=18$  horas.

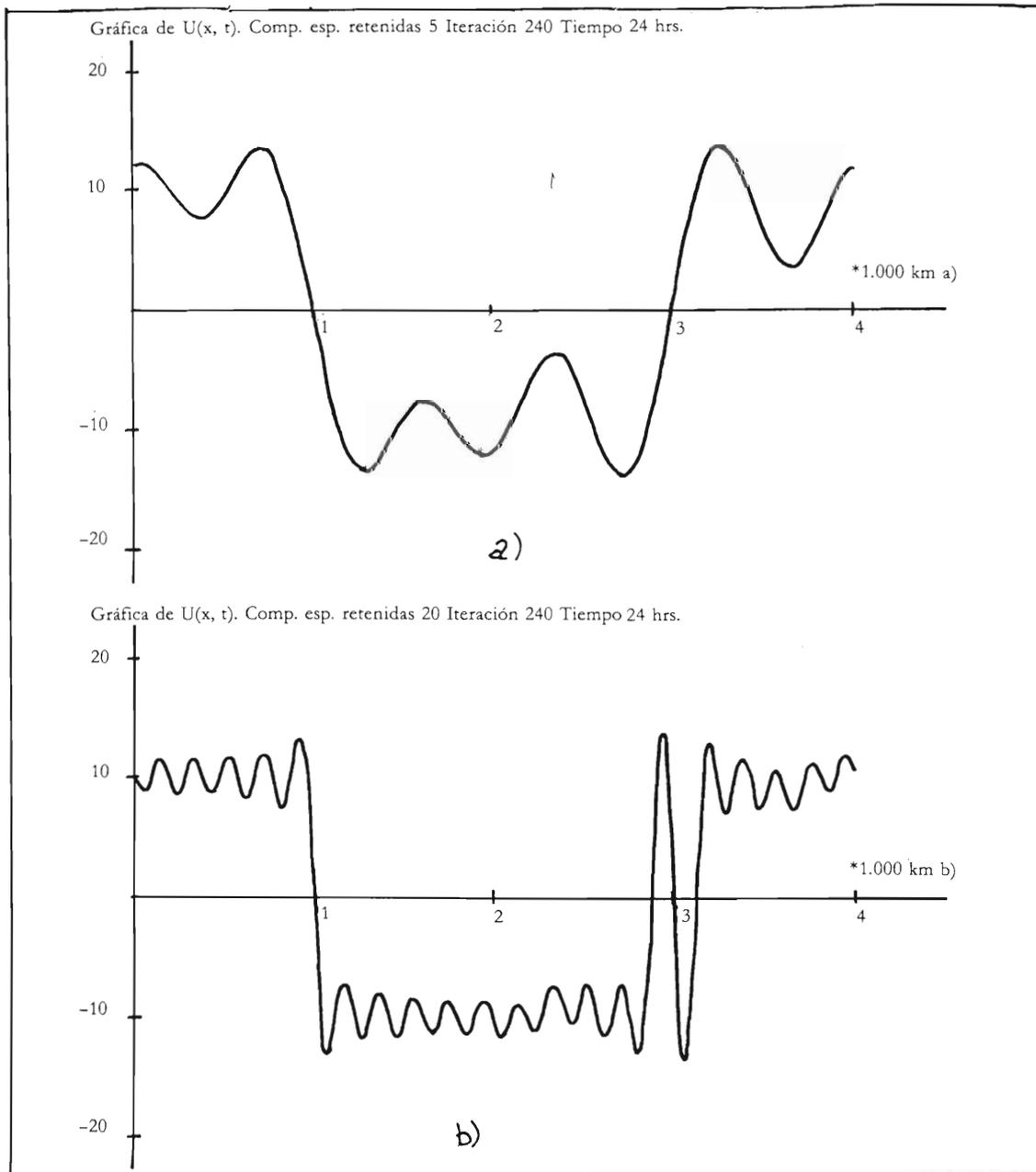


Figura 12.—Idem para  $t=24$  horas.

El intento, para  $M = 50$  no se ha podido realizar por la lentitud del microprocesador empleado (el de un Olivetti M-20 de 8 bits) y porque además se comprobó que no mejoraba notablemente los resultados obtenidos para  $M = 20$ .

La principal consecuencia que se deduce de los ejemplos es que, aunque se mejoran los resultados al aumentar  $M$  y esta mejora es muy notable al pasar de 5 a 20 componentes retenidas, los resultados permanecen muy semejantes con  $M = 50$ , es decir, que según la exactitud de resultados que se busque, no compensa aumentar mucho  $M$ , ya que se mejoran poco los resultados y se aumenta mucho el tiempo de cálculo. Por ejemplo, con el microordenador usado, una evolución de 6 horas cuesta alrededor de 7 minutos para  $M = 5$ , 30 minutos para  $M = 20$  y 4 horas y treinta minutos para  $M = 50$ .

## Bibliografía

- GARCÍA-MOYA ZAPATA, J. A. (1985): "El método espectral para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Su aplicación a la ecuación barotrópica de la vorticidad". *Revista de Meteorología*, Diciembre de 1985, 6, 25-43.
- JARRAUD, M.; SIMMONS, A. J. (1983): "The Spectral Technique". ECMWF Seminar 1983, 2, 124-275.
- MACHENHAUER, B. (1979): «The Spectral Method». WMO GARP Publications Series n. 17, 2, 124-275.
- PLATZMAN, G. W. (1964): "An Exact Integral of Complete Spectral Equations for Unsteady One-dimensional Flow". *Tellus*, 16, 422.
- WIIN-NIELSEN, A. (1974): "Dynamic Meteorology". *Compendium of Meteorology*, Vol. I, Pt. 1, WMO n.º 364, 274 pp.