Una famosa paradoja probabilística: la importancia de precisar la información y el valor de ser contrastada

JOSÉ ANTONIO LÓPEZ DÍAZ

En este artículo voy a describir y discutir una famosa paradoja probabilística desde el punto de vista de las probabilidades condicionadas y el teorema de Bayes, lo que pondrá de relieve la importancia de precisar la información conocida en cada momento a la hora de tomar decisiones racionales u óptimas. En el último apartado propondré una aplicación de la lógica de esta paradoja con más clara relevancia en un contexto científico.

La paradoja de Monty Hall

Esta paradoja fue propuesta por el matemático Steve Selvin en la revista *American Statistician* en 1975 y desde entonces ha dado lugar a numerosas discusiones (ver p.ej. la wikipedia). Los planteamientos iniciales del problema eran incompletos y de hecho no permitían concluir rigurosamente en ninguna paradoja. Ejemplo de esto es el siguiente planteamiento:

"Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre cuatro puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº3, que contiene una cabra. Entonces te ofrece la posibilidad de cambiar de elección por una de las puertas 2 o 4. Se pregunta si al concursante le interesa o no el cambio"[1].

La paradoja consistiría en que, en contra de lo más intuitivo para mucha gente, no sería correcto razonar como sigue: tras ver que la puerta 3 no tiene el coche quedan tres puertas en las que puede estar, así que cada una tiene una probabilidad de 1/3, por tanto es indiferente cambiar o no. Lo correcto sería pensar: inicialmente tengo 1/4 de probabilidad de premio, tras abrir el presentador la puerta 3 no puede cambiar mi probabilidad de 1/4, pero el premio está en una de las tres puertas, por tanto las otras dos suman una probabilidad de 1-1/4 = 3/4, luego cada una tiene 3/8 > 1/4 de probabilidad y me interesa el cambio.

Pero la solución dada como correcta presupone más de lo que dice el enunciado, en concreto para que prob (A|B)[2] = p(B) es necesario (y suficiente) que A y B sean independientes estocásticamente, esta es en realidad la definición de independencia de dos sucesos. Así que en nuestro problema la probabilidad inicial de 1/4 se conserva si y solo si el suceso A = "coche en puerta 1" es independiente del suceso B = "presentador abre puerta 3 y esta tiene una cabra", pero esto dista de ser evidente en un caso real de un concurso. Por ejemplo, el concursante puede sospechar que el presentador le abre la puerta para tentarlo a que cambie porque sabe que tiene el premio en la puerta elegida por él, y entonces falla la independencia de A y B y en consecuencia la solución dada como correcta. Incluso aunque el concursante sepa que el presentador siempre abre una puerta con cabra, independientemente de que el concursante tenga premio o no, no se deduce de esto A y B son independientes, pues B contiene la información adicional de que es precisamente la puerta 3, en este ejemplo, la que abre el presentador. Si, pongamos por caso, el presentador siempre abre la puerta 3 si y solo si el concursante tiene premio, y en caso contrario abre otra puerta con cabra, cosa que siempre puede hacer pues al menos dos puertas de las tres tienen cabra, entonces es evidente que B no es independiente de A.

De las anteriores consideraciones se infiere que si pretendemos que la solución dada arriba como correcta lo sea en verdad debemos formular con precisión el problema. Esto se consigue especificando que el concursante sabe que, independientemente de que el concursante tenga premio o no, el presentador siempre va a abrir una de las 3 puertas no elegidas por él. Además esto lo hace seleccionando al azar una puerta entre las que tengan cabra. En este caso sí se cumple la independencia de los dos sucesos A y B, pues para la veracidad de A es irrelevante que el presentador abra una puerta (siempre lo hace) y también lo es que abra precisamente la 3 que tiene una cabra como en este ejemplo pues, por simetría, tanto si se cumple A como si no, las tres puertas tienen la misma probabilidad de ser abiertas[3].

¿Cuándo sería válida la forma de razonar "incorrecta" dada arriba, que lleva a concluir que todas las puertas tienen la misma probabilidad después de que el presentador abre una con cabra? Esto sucedería si el presentador abre al azar una de las tres puertas 2-4, y resulta que es la 3 y que tiene cabra. En este caso podemos razonar cómodamente,

[1] Tomado de la Wikipedia, he cambiado de tres a cuatro puertas para aumentar la generalidad pero eso no afecta a lo sustancial de la discusión.

[2] Probabilidad condicional de que ocurra el evento A, dado que el evento B ya ha ocurrido

[3] De forma rigurosa p(B|A) = 1/3, pues si se cumple A las tres puertas 2-4 tienen cabra y el presentador selecciona una al azar; si A es falso (hay cabra en la 1) entonces si el presentador abre la puerta 3 con cabra es porque el coche está en la 2 o en la 4, con probabilidad 2/3, y tanto si está en la 2 como en la 4, la probabilidad de seleccionar la 3 precisamente vale 1/2, por tanto p(B| no A) = 2/3 1/2 = 1/3. Vemos que p(B|A) = p(B| no A) = 1/3, y de aquí como p(B) = p(A) p(B|A) + p(no A) p(B | no A) sacamos que p(B) = 1/3 y p(B) = p(B|A) con lo que A y B son independientes.

aplicando el teorema de Bayes[4], que las probabilidades *a priori* de premio en las puertas 1, 2 y 4 son evidentemente iguales a 1/4, y las verosimilitudes respectivas de B, es decir, las probabilidades respectivas de B condicionado a premio en cada una de las tres puertas son también iguales a 1/3[5] , por tanto el teorema de Bayes en la forma *p(a posteriori) proporcional a p(a priori) x verosimilitud* nos dice que las probabilidades a posteriori también son iguales a 1/3. La diferencia fundamental con el caso anterior es que el presentador no utiliza su conocimiento de dónde está el premio para abrir siempre una puerta con cabra, en este caso podría abrir una puerta con el coche y el concursante perdería automáticamente. Tras esta discusión vemos que es esencial precisar toda la información de que dispone el concursante para poder calcular las probabilidades.

Para terminar, y aun a riesgo de que el lector esté ya un tanto saturado de imaginar puertas escondiendo cabras[6], propongo que consideremos ahora que el presentador quiere beneficiar lo más posible al concursante, con el que se ha puesto previamente de acuerdo ¿Qué debe hacer en este caso el presentador[7]? Parece claro que debe intentar usar la libertad para elegir una puerta con cabra que abrir, de entre al menos dos de ellas, de una forma inteligente para transmitir información al concursante acerca de donde está el premio. Por ejemplo, puede acordar con el concursante que si el coche está en la 2 él abre la 3, si está en la 3 abre la 4, y que en el resto de los casos (premio en 1 o 4) abre la 2. De esta forma vemos que en el 50 % de los casos el concursante sabe con certeza donde está el premio (cuando este está en 2 o 3), y que en el 50 % restante tiene un 50 % de probabilidad de acertar (le da igual cambiar de puerta o no por tanto). Su probabilidad total de hacerse con el coche es en consecuencia de un 75 % (1/2 + 1/2 x 1/2). En cambio en el caso de que el presentador seleccione al azar la puerta con cabra de entre las disponibles, la probabilidad de premio, si el concursante sigue la estrategia óptima de cambiar de puerta siempre, vale, condicionando a que el coche esté o no en la puerta 1, p(premio) = 1/4 x 0 + 3/4 x 1/2 = 3/8 = 37.5 %, es decir la mitad de la anterior[8]. Si el presentador no utiliza su conocimiento (o no lo tiene) de dónde está el premio y abre al azar una de las 3 puertas (que puede por tanto tener el premio), caso que ya analizamos antes, podemos comprobar, y es bastante intuitivo, que no mejora la probabilidad total de obtener premio el concursante. En efecto, para ganar el premio la puerta al azar que abre el presentador debe tener cabra (probabilidad 3/4) y el concursante tener luego suerte (probabilidad 1/3), con lo que la probabilidad total de obtener premio es 3/4 1/3 = 1/4.

El valor de ser contrastada

Propongo a continuación una aplicación de la lógica de esta paradoja a un contexto de más relevancia directa para la empresa científica. Imaginemos que hay un conjunto de hipótesis o mecanismos propuestos para explicar un determinado fenómeno, y supongamos que las hipótesis son mutuamente excluyentes y que además sabemos que una de ellas (por tanto solo una) es la correcta. Además pongamos que *a priori* todas tienen la misma probabilidad de ser ciertas. Se decide someter a prueba a todas menos a una por medio de un conjunto sucesivo de pruebas o test que deben superar para ser la correcta, sea H0 la exenta. Tras cierto tiempo aplicando las pruebas una de las hipótesis falla una prueba. El lector habrá podido reparar en la similitud de este ejemplo con el concurso de la paradoja de Monty Hall, con H0 jugando el papel de la puerta 1, y con el premio consistiendo en ser la correcta H0. En el proceso de testeado de las hipótesis, al igual que cuando el presentador abre una de las puertas, hay una puerta/hipótesis que no entra en liza, en el caso del concurso porque la ha elegido el concursante, en el caso de las hipótesis porque no está siendo sometida a las pruebas.

Razonando de forma análoga al caso de la paradoja de Monty Hall, aquí debemos concluir que tras conocer que una hipótesis ha fallado, la probabilidad de que H0 sea verdadera sigue siendo la misma que inicialmente, y que el resto de las hipótesis testeadas y no falseadas aumentan su probabilidad, repartiéndose la probabilidad *a priori* de la hipótesis falseada equitativamente entre ellas. A esto me refiero con el título de este apartado, al hecho de que por haber sido contrastada una determinada hipótesis, gana en probabilidad si falla otra, no así si no ha sido contrastada, caso en que mantiene constante su probabilidad inicial. Como ya discutimos en el apartado anterior, es incorrecto argumentar que, después de que una ha fallado, todas las demás sin excepción aumentan de forma equitativa su probabilidad. Continuando en esta línea, si hay inicialmente N+1 hipótesis, y se llega al estadio de la investigación en que han fallado N-1 hipótesis, la única hipótesis testeada que no ha fallado tendría una probabilidad ahora de 1 – 1/(N+1) = N/(N+1), mientras H0 mantendría su probabilidad inicial 1/(N+1).

Por supuesto esa posibilidad de aumentar la probabilidad respecto a la inicial que tiene cada hipótesis contrastada se obtiene al precio de poder ser falseada, mientras que H0 mantiene su probabilidad inicial indemne hasta que termina la investigación y todas las N hipótesis han sido completamente contrastadas[9].

[4] De acuerdo a este teorema, dados varios sucesos A1, ..., Ai, ... y otro suceso B, se cumple que p (Ai|B) = k p(Ai) p (B|Ai) para una constante de proporcionalidad k = 1/p(B) que a veces, como en este caso, no hace falta calcular. Esto se resume diciendo que si tenemos varios sucesos (hipótesis) y hacemos una observación (suceso B), la probabilidad *a posteriori* de cada hipótesis es proporcional a su probabilidad a priori multiplicada por la verosimilitud de la observación condicionada a la hipótesis respectiva.

[5] Pues la probabilidad de seleccionar al azar la puerta 3 por ejemplo es claramente 1/3, y condicionando a que el premio esté en la 1, o en la 2 o 4, entonces es seguro que hay cabra en la 3.

[6] Aunque se porten tan bien como las de este problema y no emitan ningún tipo de sonido audible por el concursante...

[7] Suponemos que el presentador siempre va a abrir una puerta con cabra.

[8] Se puede probar que para este problema 75 % es el máximo que el presentador puede ayudar al concursante.

[9] Pues como hemos supuesto que una de ellas es verdadera, si las N restantes han resultado falsas H0 es verdadera, y si alguna hipótesis pasa todas las pruebas sabemos que es esta la única verdadera y por tanto H0 es falsa.