

# Relación entre la tendencia de la precipitación anual y la tendencia en la ocurrencia de sequía

JOSÉ ANTONIO LÓPEZ DÍAZ

## Introducción

Unos de los fenómenos extremos con mayor impacto es sin duda la sequía. Aunque una disminución gradual en la cantidad de precipitación es preocupante en climas próximos al estrés hídrico, si esta tendencia negativa en la precipitación se traduce en un aumento de la frecuencia de sequías el impacto es mucho mayor. En este trabajo se aborda la cuestión de estimar, a partir de una tendencia en la precipitación, el impacto de la misma sobre la probabilidad o frecuencia de aparición de periodos de sequía. La sequía se considera aquí desde el punto de vista relativo, es decir, definida por un umbral en la precipitación acumulada en  $L$  años que es un cuantil de su densidad de probabilidad, y por consiguiente invariante frente a cambios de escala<sup>1</sup> de la precipitación.

Es claro, *a priori*, que una tendencia global en una serie de precipitación de suficiente magnitud conduce a una tendencia en la frecuencia de sequías, pues si la tendencia es decreciente, en la segunda mitad de la serie abundarán los años escasos en precipitación, lo que inducirá periodos de sequías en esa mitad, y viceversa. Pero este no es el único mecanismo por el que una serie puede mostrar una tendencia temporal en la frecuencia de sequías. Por ejemplo, si en la segunda mitad de la serie aparece una marcada componente sinusoidal de periodo  $2L$ , en cada ciclo de la misma habrá una probabilidad aumentada de que haya sequía en los años en que tome valores negativos esta onda, y eso aumentará la frecuencia de sequías en la segunda mitad de la serie<sup>2</sup>.

De lo anterior se deduce que tiene un claro interés tratar de buscar una relación que refleje la parte de la tendencia en la frecuencia de sequías que se deba a la tendencia global de precipitación de

la serie, independientemente de otros mecanismos de baja frecuencia que puedan también inducirla. Este es el objetivo del presente trabajo.

## Modelo estadístico para la precipitación

Partimos de una serie de precipitación anual  $P$ , para  $t = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2$ ,  $N+1$  valores, donde por comodidad de la notación al año central se le hace corresponder con  $t = 0$ , con  $N$  impar para simplificar. La sequía la definimos a partir de la precipitación acumulada en  $L$  años. Supondremos que la distribución que sigue  $P$  es una distribución gamma biparamétrica  $\Gamma(\gamma, \beta)$ , que es una de las más usadas para precipitaciones. Esta función de distribución viene determinada por un parámetro de forma  $\gamma$  y un parámetro de escala  $\beta$ . La esperanza matemática de esta distribución es sencilla:

$$E\{\Gamma(\gamma, \beta)\} = \beta \gamma \quad [1]$$

Una propiedad notable de la gamma biparamétrica es ser reproductiva, es decir, la suma de varias variables aleatorias con distribución gamma, independientes estocásticamente unas de otras, y todas con el mismo parámetro de escala, es otra variable aleatoria con distribución  $\Gamma$  tal que el parámetro de forma es la suma de los parámetros de forma de las variables, y con el mismo parámetro de escala<sup>3</sup>:

$$\Sigma \Gamma(\gamma_i, \beta) \sim \Gamma(\Sigma \gamma_i, \beta) \quad [2]$$

Por tanto, si la  $P$  del año central se distribuye  $P(0) \sim \Gamma(\gamma_0, \beta_0)$ , y suponiendo que las variables aleatorias  $P$  en años distintos son independientes e igualmente distribuidas, deducimos que la suma de  $L$  años consecutivos centrados en el centro de la serie,  $S.L(0)$ , tiene la distribución:

$$S.L(0) \sim \Gamma(L\gamma_0, \beta_0) \quad [3]$$

## Distribución de la precipitación acumulada $L$ años en los extremos

Si ahora suponemos que la serie de precipitación tiene una tendencia de  $\alpha$  mm/año, tenemos dos modelos simples para modelizar la variación de la distribución de  $P$  con el tiempo, según cuál de los dos parámetros de la variable  $\Gamma$  se suponga fijo a lo largo de la serie:

**A)** El parámetro de escala  $\beta$  se mantiene constante con  $t$ , solo varía  $\gamma$ .

En este caso, teniendo en cuenta [1], el parámetro  $\gamma$  debe satisfacer  $\beta_0 \gamma(t) = \beta_0 \gamma_0 + \alpha t$ , de donde

$$\gamma(\pm N/2) = \gamma_0 (1 \pm N/2 \delta), \quad [4.a]$$

donde se ha introducido la tendencia escalada por la media,  $\delta = \alpha / (\beta_0 \gamma_0)$ . Esta última tiene dimensiones  $(\text{año})^{-1}$  y representa la tendencia del cociente  $P/M$  siendo  $M$  la media de la serie.

En los extremos de la serie, la precipitación acumulada en  $L$  años tendrá, en virtud de [2], la distribución:

$$S.L(\pm N/2) \sim \Gamma(L\gamma_0(1 \pm N/2 \delta), \beta_0) = \beta_0 \Gamma(L\gamma_0(1 \pm N/2 \delta), 1) \quad [5.a]$$

donde en el último paso de [4] se ha tenido en cuenta que  $\beta$  es un parámetro de escala de la distribución  $\Gamma(\gamma, \beta)$ , de tal forma que se cumple  $\Gamma(\gamma, \beta) = \beta \Gamma(\gamma, 1)$ .

**B)** Se mantiene constante con  $t$  el parámetro de forma, siendo  $\beta$  el que varía exclusivamente<sup>4</sup>.

Razonando en forma similar que en el caso A), deducimos que el parámetro  $\beta$  valdrá en los extremos:

$$\beta_0 (1 \pm N/2 \delta) \quad [4.b]$$

<sup>1</sup> Es decir, multiplicación por un factor arbitrario constante a lo largo de la serie.

<sup>2</sup> Veremos más abajo que con la definición de sequía basada en el SPI con umbral -1, la probabilidad de sequía en serie aleatoria estacionaria y con perfecta independencia entre las variables que la componen es de un 16%. Con una componente periódica de periodo  $2L$ , la probabilidad de ocurrencia de sequía se acercaría a un 50%, pues la mitad de los años estarían en fase negativa. Esto vale para cualquier onda de periodo superior a  $2L$  (siempre que la serie abarque ciclos completos).

<sup>3</sup> La notación  $X \sim F$  significa que la variable aleatoria  $X$  tiene función de distribución  $F$ .

# Relación entre la tendencia de la precipitación anual y la tendencia en la ocurrencia de sequía

En consecuencia para S.L ( $\pm N/2$ ), despreciando la pequeña variación en L años de  $\beta$  para poder aplicar [2]:

$$S.L(\pm N/2) \sim \Gamma(L \gamma_0, \beta_0(1 \pm N/2 \delta)) = \beta_0(1 \pm N/2 \delta) \Gamma(L \gamma_0, 1) \quad [5.b]$$

## La tendencia en la probabilidad de sequía

Utilizaremos para definir la sequía el SPI (*Standard Precipitation Index*) con el umbral -1. Con este umbral, en el caso de que la precipitación anual sea variable aleatoria idénticamente distribuida con el tiempo e independiente, la probabilidad de que L años correspondan a sequía vale  $\pi = F_Z(-1) \sim 16\%$  siendo Z la variable gaussiana normal estándar. En el caso de que exista una tendencia en la precipitación, denotando Seq(i) la variable indicadora de sequía centrada en año  $i^5$ , la probabilidad de sequía en el centro de la serie valdrá  $pr(Seq(0)) = \pi$ . Para calcular el SPI es necesario estimar la distribución de la precipitación en L años S.L en la serie; podemos, por simetría, aproximar esta distribución por la distribución en el centro S.L(0). En este caso, el umbral, U, para sequía de S.L según SPI(-1) valdrá:

$$U = Q(S.L(0); \pi) \quad [6]$$

donde Q(X; p) denota el cuantil p de la variable aleatoria  $X^6$ .

En los extremos de la serie, la probabilidad de sequía valdrá:

$$pr[Seq(\pm N/2)] = F(S.L(\pm N/2); U) \quad [7]$$

siendo  $F(X; q) = pr(X \leq q)$  la función de distribución de la variable aleatoria X.

Podemos entonces estimar la tendencia de la probabilidad de sequía,  $\rho$ , por la tendencia determinada por los extremos:

$$\rho \approx (F(S.L(+N/2); U) - F(S.L(-N/2); U)) / (N+1) \quad [8]$$

Para cada uno de los modelos de

tendencia de P considerados, A y B, las ecuaciones [5.a] y [5.b] proporcionan las distribuciones S.L en los extremos, en función de la tendencia escalada de P,  $\delta$ , de los parámetros centrales de su distribución,  $(\beta_0, \gamma_0)$ , de la longitud de la serie N y de la longitud base de la sequía L. Como U según [6] solo depende de  $(\beta_0, \gamma_0)$  y L, obtenemos finalmente que [8] nos da una función  $\rho(\delta, \beta_0, \gamma_0; L, N)$ , en la que los tres primeros argumentos son continuos, los dos últimos discretos.

Por otra parte, *a priori* parece claro que si tenemos dos series de precipitación P y P', siendo una múltiplo de la otra,  $P'(t) = k P(t)$  para todo t, siendo k una constante, la tendencia en la probabilidad de ocurrencia de sequía tiene que ser la misma, pues el SPI es invariante frente a cambios de escala, y el resto de los cálculos necesarios también. Esto se puede deducir rigurosamente de las fórmulas anteriores. En efecto, según [6], puesto que  $S.L'(0) = k S.L(0)$  se tiene  $U' = k U$ ; esta misma relación se cumple en los extremos

(pues se tiene  $\beta_0' = k \beta_0$  al tratarse del parámetro de escala de la  $\Gamma$ , y basta sustituir en [5.a] y [5.b]). Por otra parte, teniendo en cuenta la relación  $F(X; q) = F(kX; kq)$  válida para toda X y q, deducida inmediatamente de la definición de función de distribución, [7] resulta ser invariante frente a la multiplicación por k, y en consecuencia [8] también. En suma encontramos que, en realidad,  $\rho$  es una función de cuatro variables,  $\rho(\delta, \gamma_0; L, N)^7$ . Algunas propiedades evidentes de esta función son:  $\delta > 0$  implica que  $\rho < 0$  pues una tendencia creciente en P conlleva una tendencia decreciente en la ocurrencia de sequía y viceversa, y  $\rho(\delta, \gamma_0; L, N) = -\rho(-\delta, \gamma_0; L, N)$

En la práctica, podemos estimar el parámetro de forma de la P central por el método de los momentos aplicado al conjunto de la serie. Siendo M y S la media y desviación estándar de P, obtenemos el estimador de  $\gamma_0$  dado por  $\gamma_0^* = M^2/S^2$ . Introduciendo el coeficiente de variación C.V =  $S/M = (\gamma_0^*)^{-1/2}$ , vemos que  $\rho$  tiene la dependencia  $\rho(\delta, C.V, L, N)$ .

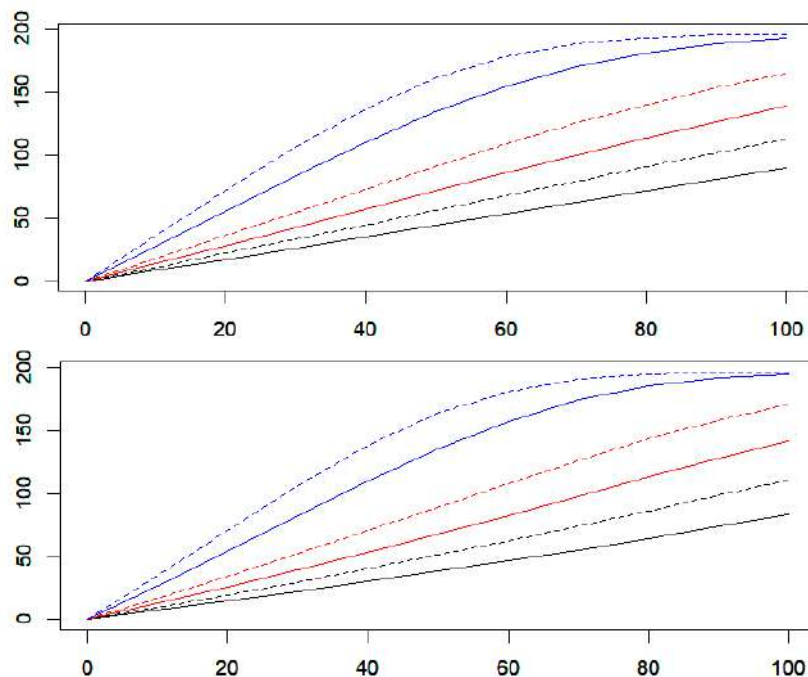


Fig. 1: Eje X,  $\delta$  (%/siglo); eje Y,  $-\rho$  (%/siglo). Colores negro, rojo y azul corresponden a C.V = 50 %, 30 % y 15 % respectivamente. Líneas continuas L=3, a trazos L=5. Gráfico superior modelo A, inferior modelo B.

<sup>4</sup> En principio cabe esperar que si el aumento de precipitación se debe a un aumento en la precipitación de los principales episodios lluviosos, sin un cambio en la estructura estadística de esos episodios, el modelo sea el B, con cambio en exclusiva de  $\beta$ , que es un parámetro de escala. Pero si el aumento de precipitación conlleva un cambio en la estructura estadística de los principales episodios lluviosos, tendiendo a un aumento de su número, el modelo adecuado sea el A, en que cambia tan solo el parámetro de forma en virtud de [2]. Estos son los casos límites, en la práctica habrá una mezcla de ambos modelos A y B.

<sup>5</sup> Una variable aleatoria indicadora I de un suceso toma solo dos valores, 0/1, según que ocurra, o no, el suceso.

<sup>6</sup>  $Q(X; p) = q$  equivale a  $pr(X \leq q) = p$

<sup>7</sup> Si una función de x depende de un parámetro  $\psi$ ,  $f = f(x; \psi)$ , pero para toda k se cumple  $f(x; k\psi) = f(x; \psi)$ , válida para todo x, la dependencia de  $\psi$  no es real pues, para x arbitrario, f toma el mismo valor para cualquier valor de  $\psi$ .

## Aproximación práctica de $\rho$

Analicemos en primer lugar la dependencia de  $\rho$  ( $\delta, \gamma_0; L, N$ ) con  $\delta$ , dejando fijos los otros argumentos  $\gamma_0, L$  y  $N$ . Como muestra la figura 1, esta dependencia es razonablemente lineal hasta valores de C.V = 15 %, muy buena para valores altos del C.V (pequeños de  $\gamma_0$ ) que corresponden a climas secos, mostrando en cambio cierta concavidad para valores bajos del C.V y valores de  $\delta$  superiores a 50 %/siglo, en que de todas formas los valores de  $\rho$  son muy grandes, del orden de 150 %/siglo, con lo que un cierto error absoluto en la aproximación lineal significa un pequeño error relativo que puede admitirse.

Pasemos ahora a la derivada de  $\rho$  respecto de  $\delta$  en  $\delta = 0$  fijando los otros tres argumentos de  $\rho$ , designémosla por  $\phi$  ( $\gamma_0; L, N$ ). Experimentando con la posible forma de dependencia del parámetro de forma de esta derivada se descubre que  $\phi$  ( $\gamma_0; L, N$ ) es muy aproximadamente lineal respecto a  $\gamma_0^{1/2}$ . En la figura 2, cada línea representa  $\phi$  ( $\gamma_0; L, N$ ) en función de  $\gamma_0^{1/2}$  para los dos modelos A y B, longitudes de sequía  $L=3, 5$ , y valores de  $N = 30, 100$ . Se observa que todas las líneas son prácticamente rectas. Además, la dependencia tanto del modelo A o B elegido para la tendencia de  $P$ , como de  $N$  es dé-

En resumen, hemos probado que podemos aproximar la dependencia de  $\rho$  con  $\delta$  por una recta con una pendiente que depende linealmente de  $\gamma_0^{1/2}$ , válida para los dos modelos A y B y para cualquier  $N$ . Valiéndose de lo anterior, se encuentran la siguiente igualdad aproximada para el cociente  $\rho / \delta$ , razón adimensional entre las tendencias de la probabilidad de ocurrencia de sequía y de la precipitación escalada por la media:

$$\rho / \delta \approx c \gamma_0^{1/2} \approx c / C.V \quad [9]$$

con  $c = -0.41$  para  $L=3$  y  $c = -0.53$  para  $L = 5$ . La ecuación [9] muestra que aproximadamente  $\rho / \delta$  es inversamente proporcional a C.V.

## Conclusiones

Se ha obtenido una relación sencilla entre la tendencia al aumento/disminución del número de sequías, según el esquema SPI, la tendencia en la precipitación escalada por la media y el coeficiente de variación de la precipitación de la serie. Puesto que la tendencia de la precipitación es muy común calcularla, mientras que la tendencia de las sequías es una aplicación más específica, esta relación es útil para derivar fácilmente la segunda de la primera, eso sí, sin tener en cuenta mecanismos de baja frecuencia en la serie que puedan tra-

ducirse en modificación de la tendencia de la frecuencia de sequías. Otra aplicación es obtener una estimación del incremento/disminución de la frecuencia de sequías en los escenarios climáticos, al ser a priori la tendencia en la precipitación anual más robusta, y por tanto sujeta a menos incertidumbre, que la tendencia de un fenómeno extremo como la sequía. La determinación de la sequía requiere estimar la distribución de la precipitación acumulada en un número  $L$  de años consecutivos, y por tanto tener una idea de la función de distribución conjunta de la precipitación ese número de años, con todas las posibles complejas dependencias.

Por otra parte, desde un punto de vista descriptivo climático, es notable la relación encontrada inversamente proporcional entre la tendencia en frecuencia de sequías y el coeficiente de variación de la serie, para un valor fijo de la tendencia de la precipitación escalada por su media. Dado que el coeficiente de variación puede variar de forma importante en distancias no muy grandes, el efecto de esta relación puede ser muy importante. Por ejemplo, en España el coeficiente de variación se mueve entre valores próximos al 15 % de la España más húmeda, hasta valores superiores incluso al 50 % en la España más árida, como en zonas de Las Canarias. Esto supone un factor de más 3, de tal forma que para una misma tendencia en la precipitación relativa a la media, en el clima más lluvioso la tendencia en la frecuencia de sequías será más del triple que en el clima más seco. Este resultado puede parecer a primera vista paradójico, pero recordemos, en primer lugar, que el SPI es una magnitud relativa, independiente del factor de escala, y en segundo lugar, que en el clima más seco la mayor asimetría de la distribución de precipitaciones hará más probable que en el clima húmedo, el hecho de que a lo largo de los  $L$  años utilizados para definir la sequía, al menos uno de ellos se aleje de forma tan notable de la media que interrumpa la racha seca. Esta modulación tan marcada de la tendencia a la aparición de sequías por el coeficiente de variación de la precipitación habrá de ser tomada en cuenta a la hora de valorar las tendencias de precipitación en términos de la aparición de sequías, uno de los principales impactos climáticos extremos.

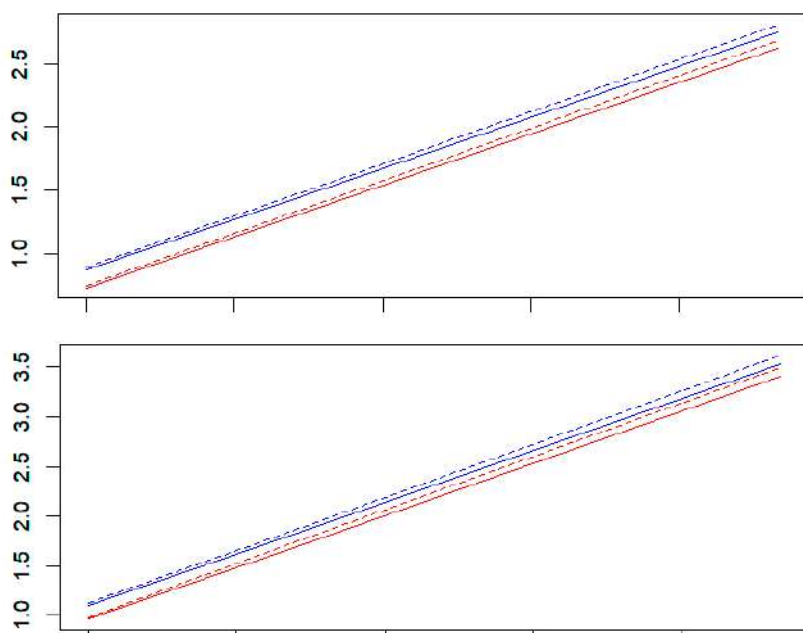


Fig. 2: Eje X,  $\gamma_0^{1/2}$  con  $\gamma_0$  correspondiente al rango de C.V [50 %, 15 %]; eje Y,  $d\rho(\delta, \gamma_0; L, N) / d\delta$  en  $\delta = 0$ . Color azul modelo A, rojo modelo B; líneas continua  $N = 30$ , a trazos  $N = 100$ . Gráfico superior  $L = 3$ , inferior  $L = 5$ .

<sup>8</sup> La relación última de [9] se puede también poner, recordando que  $C.V = S/M$  y que  $\delta = \alpha / M$ , en la forma  $\rho = c \alpha / S$ , que expresa que la tendencia en la ocurrencia de sequía es directamente proporcional a la tendencia de la precipitación escalada por su desviación estándar.