

# Problema de la no-localidad en la mecánica cuántica: el argumento de Einstein

JOSÉ ANTONIO LÓPEZ DÍAZ

El asunto de este artículo gira en torno a alguna de las profundas implicaciones que la física cuántica tiene para nuestra comprensión del mundo, al hilo de la concesión del Nobel de este año a tres distinguidos investigadores en este campo, A. Aspect, J. Clauser y A. Zeilinger. Pero antes de abordar el asunto central, la no-localidad, no estaría de más recordar que los fenómenos cuánticos tienen bastantes más repercusiones bien visibles de lo que a menudo se piensa. En el campo de las ciencias atmosféricas basta pensar en la importancia para el balance energético de la Tierra, y en concreto su atmósfera, de la ley de Planck de la radiación del cuerpo negro<sup>1</sup>, que con mucha aproximación describe la emisión de radiación de onda larga de la Tierra. En este orden de cosas, el efecto invernadero de la atmósfera, de tanta actualidad por su incremento por el hombre, está determinado por las bandas de absorción de los gases de efecto invernadero ( $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ , etc). El hecho de que la absorción de radiación esté concentrada en determinadas bandas estrechas de radiación es un fenómeno puramente cuántico, inexplicable para la física clásica. Y yo me atrevería a decir que también afortunado, ya que estas bandas se acaban saturando, lo que no sucedería de forma tan rápida si la absorción de esos gases estuviera uniformemente repartida en el espectro. En este último caso, la absorción crecería de forma aproximadamente lineal en un intervalo de concentración mucho mayor que en la realidad, al estar la capacidad absorbente del gas mucho más repartida en el espectro. Pero de hecho los gases absorben de forma preferente en unas pocas bandas estrechas, y entonces a medida que crece su concentración las capas inferiores de la atmósfera acaban absorbiendo casi toda la radiación de la banda y las capas superiores absorben ya mucho menos. Esto explica que el

efecto de absorción del  $CO_2$  crezca de forma logarítmica, mientras que el del  $CH_4$ , mucho menos presente en la atmósfera, todavía tiene una dependencia con la raíz cuadrada de la concentración, pese a que ambas moléculas absorben individualmente un porcentaje similar de la radiación en sus bandas de absorción. Así mismo, el forzamiento radiativo en la actualidad del  $CO_2$  es unas cuatro veces el del  $CH_4$ , a pesar de que la concentración del primero es unas 250 veces superior a la del segundo.

## Principio de localidad

El principio de localidad es fundamental en la Física clásica pre-cuántica, incluida la relativista. Se refiere a que los efectos físicos en un lugar determinado (cualquier medida de magnitudes físicas) están determinados completamente por las condiciones en el punto. En el electromagnetismo se consiguió con la introducción del concepto de campo (eléctrico, magnético) que recoge todo el efecto que las cargas producen en un punto dado, de forma análoga para la gravedad con el campo gravitatorio. Einstein, en su confrontación con la cuántica, estuvo particularmente molesto con la violación de esta localidad implícita en la física cuántica.

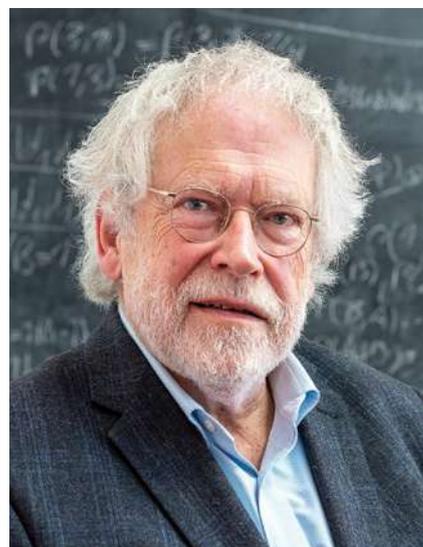
En la conferencia de Solvay (1927) Einstein presentó un argumento dirigido a probar que la interpretación, por entonces ya generalizada, de la función de onda de una partícula, como un electrón o fotón, conlleva una violación del principio de localidad. En esta interpretación la función de onda describe completamente el estado de la partícula, de tal forma que el cuadrado de su módulo da la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en cada punto del espacio si se efectúa una medición de su posición. El experimento que usó para ilustrar la problemática fue el de un electrón que se hace pasar por una estrecha rendija,



A. Aspect



J. Clauser



A. Zeilinger

<sup>1</sup> Recordemos que esta ley formulada en 1900 por Planck marcó el inicio, todavía balbuciente, de la física cuántica.

y tras la rendija se registra su posición en una pantalla semiesférica. De acuerdo a la mecánica cuántica la función de onda del electrón, análogamente a lo que sucede con las ondas clásicas, se difracta en la rendija y produce una distribución de probabilidad extendida por toda la pantalla.

Einstein se percató agudamente de que el hecho de que siempre se observa un único electrón en un punto de la pantalla, de acuerdo a la densidad de probabilidad inducida por la función de onda, implica que la función de onda no actúa como un campo clásico, es decir, localmente. En efecto, si fuera así, habría casos en que al llegar la onda a la pantalla se “activaran” las probabilidades en dos puntos por ejemplo, y aparecieran dos electrones. Por tanto, hay, de alguna forma, una transmisión instantánea de información desde el punto donde se observa el electrón en la pantalla, al resto de la pantalla para “desactivar” la densidad de probabilidad en todos los otros puntos. Y como es sabido, según la teoría de la relatividad, no es posible la transmisión instantánea de información, el límite de velocidad es el de la luz.

## Formulación probabilista

Para aclarar lo anterior, imaginemos un caso sencillo: supongamos que la función de onda del electrón asigna probabilidades  $p_1$  y  $p_2$  a dos regiones de la pantalla  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente, disjuntas, que la cubren totalmente, de modo que  $p_1 + p_2 = 1$ . En este caso,

el razonamiento de Einstein es que si la función de onda actuara localmente, el hecho de que el electrón se detecte en una región debe ser independiente estocásticamente de que incida o no en la otra. Así pues, habría cuatro posibles resultados: que el electrón se observe en  $R_1$  y en  $R_2$  (con probabilidad  $p_1 * p_2$ ), que solo se observe en  $R_1$  ( $p_1 * (1 - p_2)$ ), que solo se observe en  $R_2$  ( $p_2 * (1 - p_1)$ ) y que no se observe en ninguna ( $(1 - p_1) * (1 - p_2)$ ). Esto es lo que sucedería necesariamente en caso de localidad, o sea, independencia estocástica en términos probabilísticos. Esto está en flagrante contradicción con la experiencia, pues los sucesos primero y cuarto anteriores nunca se observan, es decir, tienen nula probabilidad. Por otra parte de observarse alguno de ellos supondría una violación flagrante de principios básicos de la Física como la conservación de la masa-energía o la carga (en los casos de observar 2 o 0 electrones, pues se parte de un electrón).

En mi opinión, una razón por la que este conflicto entre la interpretación de la mecánica cuántica ya entonces estándar (interpretación de Copenhague), y la localidad de las leyes físicas, pasara desapercibida durante bastantes años, estriba en la engañosa simplicidad de la expresión “función de densidad de probabilidad del electrón”. Porque esta expresión, que describe correctamente las observaciones según la interpretación de Born tomando como función de densidad el cuadrado del módulo de la

función de onda, es en sí contradictoria con la misma interpretación de Copenhague, al referirse a un determinado electrón. Pues según esta interpretación el electrón como partícula definida en el espacio-tiempo, simplemente no existe después de atravesar la rendija y antes de ser detectado en la pantalla, lo único que existe entre esos dos instantes es la función de onda (sea esta lo que fuere) extendida a todo el espacio. Esto es lo que se entiende básicamente por completitud de la mecánica cuántica, que la función de onda describe exhaustivamente el estado físico. Pero como Einstein remarcó, si esto se toma en serio, entonces las observaciones indican que la cuántica es una teoría no-local, algo que él nunca llegó a aceptar.

Las anteriores consideraciones indican que sería conveniente describir de forma rigurosa las probabilidades que induce la función de onda cuántica sin contentarse con la confusa expresión “densidad de probabilidad del electrón”. Para ello, supongamos en primer lugar que la cuántica fuese una teoría local; en este caso, como vimos arriba, los sucesos ocurrencia del electrón en dos puntos distintos del espacio tras la medida de la posición, han de ser necesariamente estocásticamente independientes. El proceso estocástico que describiría la ocurrencia del electrón sería lo que se conoce como un proceso de Poisson con intensidad dada por el cuadrado del módulo de la función de onda. En este caso, la esperanza matemática

<sup>2</sup> Sea  $O(\mathbf{r}) dV$  la variable aleatoria indicadora de ocurrencia del proceso de Poisson en el volumen elemental  $dV$  en torno al punto  $\mathbf{r}$  del espacio (esta variable vale 1/0 según que un punto caiga en  $dV$  o no). El número total de ocurrencias en el espacio será la suma (en el límite integral) de esas variables aleatorias, por tanto la esperanza del número de ocurrencias en todo el espacio es la suma de las esperanzas de cada variable. Como  $E[O(\mathbf{r}) dV] = \text{pr} \{ O(\mathbf{r}) dV = 1 \} * 1 + \text{pr} \{ O(\mathbf{r}) dV = 0 \} * 0 = \text{pr} \{ O(\mathbf{r}) dV = 1 \} = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV$ , al integrar a todo el espacio, teniendo en cuenta la normalización de la función de ondas de la partícula  $\psi$ , se obtiene lo afirmado.

<sup>3</sup> Recordemos la definición de la variable de Poisson como el límite cuando  $N$  tiende a infinito de una variable binomial de índice  $N$  y probabilidad  $p$  (por tanto suma de  $N$  variables de Bernoulli idénticas independientes de probabilidad  $p$  de ocurrencia cada una), cuando en el límite  $Np$  tiende a una cantidad finita  $\lambda$ . En este límite la variable binomial tiende a una de Poisson con parámetro  $\lambda$ . En el caso del proceso espacial de Poisson, supongamos que dividimos el espacio en  $N$  volúmenes disjuntos tales que la integral de la intensidad del proceso en cada volumen sea la misma cantidad  $\Delta p$ . Cuando  $N$  tiende a infinito  $\Delta p$  tiende a cero, de tal manera que en cada volumen elemental solo puede ocurrir como máximo un punto (la ocurrencia de dos es un infinitésimo de segundo orden), y el proceso se puede describir como una suma de variables dicotómicas de Bernoulli con la misma probabilidad  $\Delta p$ , por tanto es una variable binomial con  $N \Delta p$  finita igual a la integral a todo el espacio de la intensidad del proceso. En nuestro caso esta integral es igual a uno por la condición de normalización de la función de onda, y por tanto  $\lambda=1$  para la variable de Poisson.

<sup>4</sup> El nombre viene de que la distribución binomial corresponde al caso de dos probabilidades,  $p$  y  $1-p$ .

<sup>5</sup> Designando por  $O_i$  y  $O_j$  las variables aleatorias indicatrices (toman valor 0 o 1) correspondientes a que la variable multinomial caiga en las regiones  $i$  y  $j$  respectivamente, se tiene  $\text{cov}(O_i, O_j) = E[O_i O_j] - E[O_i]E[O_j] = 0 - p_i p_j$ , donde se ha usado que si  $O_i = 1$ , o sea la variable cae en la región  $i$ , entonces necesariamente  $O_j = 0$  y a la inversa, por lo que  $O_i O_j = 0$ .

<sup>6</sup> Se puede razonar que este proceso de Poisson condicionado es equivalente al proceso multinomial no local. Un argumento heurístico consiste en reparar en que para dos regiones separadas del espacio con el mismo volumen infinitesimal, el cociente de las probabilidades de ocurrencia del electrón en el proceso sin condicionar y en el condicionado deben coincidir, en ambos casos dado por el cociente de los cuadrados del módulo de la función de ondas en ambos puntos. Como en el proceso condicionado se fuerza una única ocurrencia, igual que el multinomial límite, y los cocientes de probabilidades son iguales, ambos son idénticos.

# Problema de la no-localidad en la mecánica cuántica: el argumento de Einstein

del número de ocurrencias del electrón valdría la unidad, de acuerdo con la condición de normalización de la función de ondas<sup>2</sup>. Pero como vimos arriba, no se garantiza que el suceso "observar una única ocurrencia del electrón" tenga probabilidad unidad. De hecho la variable aleatoria "número de ocurrencias del electrón en cualquier punto de la pantalla" es una variable de Poisson (de ahí el nombre de este tipo de procesos puntuales) con parámetro unidad<sup>3</sup>. Esto da una función de masa de probabilidad de Poisson para  $k$  ocurrencias del proceso,  $\text{pr}(N = k) = e^{-1}/k!$ . De acuerdo con ella habría la misma probabilidad de no observar ningún electrón que de observar uno (37%),  $1/2$  de la anterior de observar dos, ....

Veamos ahora cómo podemos describir las probabilidades cuánticas del electrón que corresponden a las observaciones reales. Podemos decir que el proceso "observación del electrón en un punto de la pantalla" es una realización de una variable aleatoria multinomial en el límite. En efecto, empezando por el caso discreto, si el electrón tiene unas probabilidades  $p_i, i=1, \dots, k$ , de aparecer en regiones disjuntas que cubren todo el espacio, esto es análogo al proceso de extraer un número al azar en el intervalo  $[0, 1]$  dividido en intervalos de longitud  $p_i$ . A esto se le conoce como una variable multinomial<sup>4</sup> con probabilidades  $p_i$ . El carácter no-local de esta distribución queda de manifiesto sin más que reparar en que la covarianza entre las ocurrencias de la variable en dos regiones cualesquiera, de probabilidades  $p_i$  y  $p_j$ , vale  $-p_i * p_j$ , que al ser distinta de cero indica claramente que no son independientes estocásticamente, esto es, la teoría física correspondiente no puede ser local<sup>5</sup>.

Otra forma de describir estocástica-

mente de forma completa las probabilidades cuánticas, equivalente en términos probabilísticos a la anterior, pero quizá de estructura más transparente, es partir de la descripción local según un proceso de Poisson como el anterior, pero imponiendo la condición de que nos restringimos a las realizaciones del proceso en que ocurre un único electrón. Esto se consigue condicionando probabilísticamente el proceso de Poisson. De este modo podemos describir el proceso estocástico de ocurrencia del electrón tras la medida de su posición, como un proceso de Poisson de intensidad local dada por el cuadrado del módulo de su función de onda, condicionado a una única ocurrencia<sup>6</sup>. La ventaja de esta descripción es que queda claro el origen de la no-localidad, a saber, el condicionar el proceso local (de Poisson) al suceso una única ocurrencia. Este suceso es manifiestamente no-local, pues para verificar si se cumple o no es necesario considerar, en el instante de la medida, todos los puntos del espacio (para contar todas las ocurrencias del proceso de Poisson). Esto implica la famosa "spooky action at a distance"<sup>7</sup> que a Einstein tanto le molestaba.

## Sobre el Nobel de este año

Como ha puesto de manifiesto el filósofo de la ciencia y físico Tim Maudlin, a pesar de lo dicho por la Academia de Ciencias sueca al entregar el Nobel de física de este año, no es cierto que estos investigadores hayan contribuido a demostrar la imposibilidad de interpretaciones de la cuántica con teorías de variables escondidas. De hecho, existe una interpretación de este tipo, la teoría cuántica de de Broglie-Bohm, o de la onda piloto, que contiene variables

escondidas o no observables, como la posición y velocidad del electrón entre observaciones, que reproduce todos los resultados de la teoría cuántica estándar<sup>8</sup>. El asunto es complejo, pero a grandes rasgos, lo que sucedió es que en su artículo de 1935, EPR<sup>9</sup> imaginan un experimento sobre posiciones y momentos de partículas entrelazadas a distancia, y concluyen, dando por supuesto que la no-localidad es inaceptable en cualquier teoría física, que la única salida es que existen variables ocultas en la cuántica (*hidden variables*) que explicarían los paradójicos resultados<sup>10</sup>. Más adelante se formuló la paradoja de EPR en términos de espines de partículas entrelazadas, pero el cambio fundamental vino cuando en 1964 John Bell se planteó medidas de espín de partículas entrelazadas en estado singlete (quiere decir que si una da espín positivo en una dirección, la otra tiene que darlo negativo en la misma dirección) en direcciones distintas del espacio, y formuló una desigualdad que cualquier teoría local tiene necesariamente que cumplir. Como hemos visto, los experimentos posteriores dieron la razón a las predicciones cuánticas violando la desigualdad de Bell, por tanto está demostrado que en la naturaleza existe algún tipo de interacción no-local. Sin embargo, esta no-localidad cuántica no permite enviar señales o información que superen la velocidad de la luz, por tanto la teoría de la relatividad se mantiene en pie pero en un sentido más restringido, al menos filosóficamente, de lo que pensaba Einstein.

## Referencias

- Norsen, T: *Foundations of Quantum Mechanics*, Springer International Publishing AG 2017, ISBN 978-3-319-65866-7

<sup>7</sup> Más o menos, acción a distancia fantasmagórica.

<sup>8</sup> Esta teoría de de Broglie-Bohm, pese a su escasa aceptación entre los teóricos, tiene la gran ventaja de que es determinista, y las probabilidades no son un hecho fundamental y primario de la naturaleza como en la interpretación ortodoxa de Copenhague, sino que surgen de un desconocimiento (ignorancia nuestra) de las condiciones iniciales. Así pues, en términos filosóficos, de las dos grandes innovaciones de la cuántica, el no determinismo y la no localidad, la primera es evitable, pero no así la segunda. Esta diferencia fundamental en el estatus ontológico de ambos conceptos muy a menudo se soslaya y se considera que ambos por igual, no determinismo y no localidad, son consecuencias inevitables de la nueva realidad cuántica.

<sup>9</sup> Einstein, Podolsky y Rosen.

<sup>10</sup> La idea es reducir las correlaciones entre medidas a distancia a mera ignorancia de las condiciones de partida. Una ilustración sencilla es imaginar que alguien introduce una bola blanca y una negra en sendas cajas, y nosotros sabemos este hecho. Si luego las cajas se separan, y sacamos de una caja una bola blanca, trivialmente concluimos que en la otra está la negra, y viceversa. Si nosotros no hemos visto la introducción de las bolas, no sabemos antes de abrir alguna cual está en cada caja, por tanto asignamos la probabilidad  $1/2$  a que la bola blanca esté en cada una de las cajas, y lo mismo para la negra. Pero además de esas probabilidades (que serían como la función de onda del proceso en el caso cuántico), en este ejemplo tenemos la información adicional de que las bolas están cada una en una caja; esta información adicional sería la variable oculta, añadida a la función de onda, postulada por EPR para evitar la no-localidad.