Sobre la aceleración de (Laplace)-Coriolis

JOSÉ ANTONIO LÓPEZ DÍAZ

Introducción

El papel central que juega la fuerza de Coriolis en los movimientos atmosféricos, especialmente en nuestras latitudes medias, y en las corrientes oceánicas, es ocioso resaltarlo. Por ello su estudio es parte insoslayable de cualquier texto de dinámica atmosférica, y generalmente se ha visto antes en los cursos de mecánica de ciencias físicas por ejemplo. Pero a menudo le surgen dudas al estudioso de la meteorología en la interpretación y relación de dichas fuerzas con nociones emparentadas como el momento angular o la fuerza centrífuga. Esta es una de las razones que me han llevado a escribir estas líneas, el reunir una serie de resultados relativos a la aceleración y la fuerza de Coriolis en su conexión con el resto de la mecánica, algo que no se suele ver bajo este punto de vista porque las aceleraciones inerciales en general se consideran desgajadas del resto. Como paso previo, presento un análisis detallado de su naturaleza, que aunque está suficientemente clarificada por la deducción habitual en los textos, normalmente no se le presta suficiente atención a su peculiar, y hasta paradójica, naturaleza. También intento resaltar su importancia en la Física, y termino argumentando que un mejor conocimiento de las mismas puede ayudar a percibir de forma intuitiva, o al menos, menos contra intuitiva, los fenómenos giroscópicos.

Concepto y derivación

Aparece como un término complementario cuando se expresa la aceleración de una partícula en su movimiento respecto de una referencia S, nombrada convencionalmente absoluta (sin que tenga que ser inercial galileana, no estamos ahora considerando fuerzas), en función de su aceleración respecto de otra referencia S', llamada relativa, en movimiento giratorio respecto a S. La aceleración absoluta **A** se descompone en tres términos:

a) aceleración denominada de arrastre $\mathbf{A_a}$, que es la que tiene el punto fijo de la referencia relativa S' en que está el objeto, en su movimiento respecto a S

b) la aceleración denominada relativa del objeto **a**, que es la determinada por un observador que se mueva solidariamente con S'

c) el término complementario de Coriolis $\mathbf{A_c}$

$\mathbf{A = A_a + a + A_c}$

La siguiente derivación no es la habitual que el lector puede encontrar en cualquier texto de Física, basada en relacionar la derivada de un vector en un sistema móvil S' con su derivada en un sistema fijo S. El objetivo es tratar de seguir la pista con más detenimiento al origen de los distintos términos.

Supongamos que en el instante t el objeto se mueve con velocidad **V** respecto a S. **V** se descompone en la velocidad denominada de arrastre $\mathbf{V_a}$, que es la del punto P fijo en S', en su movimiento respecto a S, y en la velocidad del objeto respecto a S', denominada velocidad relativa **v**:

$\mathbf{V = V_a + v}$ **(1)**

En un instante posterior t' tendremos una descomposición de las velocidades similar, con velocidades con primas. La aceleración absoluta del objeto es el límite de la diferencia de las velocidades de t' y t dividido por (t'-t) cuando t' tiende a t. Esta diferencia es

$\mathbf{V' - V = (V_a' - V_a) + (v' - v)}$ **(2)**

El primer término de la derecha de (2) da lugar a una mitad del término de Coriolis, y el segundo a la otra mitad. Como el término $\mathbf{V_a' - V_a}$ contiene las velocidades de arrastre de dos puntos diferentes de la referencia relativa S' en dos instantes diferentes, se puede descomponer en dos:

a) la diferencia entre las velocidades de arrastre del punto P solidario de S' en que el objeto está en t, entre los instantes t' y t. Este término da lugar a la denominada aceleración de arrastre $\mathbf{A_a}$, como vemos debida a la aceleración de un punto fijo en S'. Denominemos $\mathbf{V_a''}$ a la velocidad de arrastre del punto P fijo en S' en t', este término es $\mathbf{V_a'' - V_a}$.

b) la diferencia $\mathbf{V_a' - V_a''}$

El término $\mathbf{V_a' - V_a''}$ es la diferencia de velocidades de arrastre de dos puntos fijos de S' en t': el punto donde está el objeto en t', y el punto en que estaba inicialmente el objeto. Esta diferencia da lugar a una mitad del término complementario de Coriolis. Como se ve, aparece debida al mero desplazamiento de la partícula respecto a la referencia relativa, con el consiguiente cambio posible en velocidades de arrastre.

Consideremos la diferencia de velocidades relativas (**v' – v**). Este término es más delicado de analizar, quizá esto ha contribuido a que las ideas sobre la aceleración de Coriolis tardaran bastante en tenerse claras en la mecánica. La cuestión es que parece que corresponde simplemente a la aceleración relativa **a** del objeto, es decir, la vista por un observador que se mueva con S'. Pero un observador solidario con S' verá el vector **v'** girado respecto a cómo lo ve un observador solidario con S, debido al giro que en el tiempo entre t y t' ha experimentado S' respecto a S. La aceleración **a** que es vista por un observador solidario con S' se obtiene restando a **v'**, no **v**, sino el vector en que se transforma **v** en el instante t' si estuviera fijo respecto a S', llamémoslo **v''**. Esta diferencia **v' – v''** da el término **a**, pero entonces la diferencia **v'' – v** da lugar a una aceleración complementaria, que es la segunda mitad del término de Coriolis. Este segundo término aparece debido a, por así decirlo, el "arrastre vectorial" que experimenta el vector velocidad relativa debido al movimiento de S'. Podemos por tanto decir que el primer término complementario de Coriolis se debe al arrastre puntual, y el segundo al arrastre vectorial. Ambos son idénticos, como veremos[1].

Algunas consecuencias que podemos extraer:

[1] En la explicación intuitiva más común de la aceleración de Coriolis se usa el movimiento de una partícula en una referencia S' giratoria que se mueve según un radio fijo en S', y lo que se explica es la parte de arrastre puntual de la aceleración de Coriolis, no se suele mencionar el 50 % restante debido al arrastre vectorial. Esto sin duda se debe a que es menos intuitiva, pero podría ayudar el mostrar que no es, en sí, más misteriosa que la aceleración centrípeta. En efecto, si los vectores velocidad relativa radiales en dos instantes próximos se los gira 90º hacia la izquierda se vuelven paralelos a los vectores velocidad en esos instantes que tendría una partícula en movimiento circular, que dan lugar a la aparición de una aceleración centrípeta. Por tanto en el movimiento relativo radial tiene que aparecer una aceleración girada 90º respecto a la centrípeta.

a) El término complementario de arrastre puntual depende de la magnitud del desplazamiento del objeto en S', por tanto de su velocidad relativa **v**, y de la variación de velocidades de arrastre entre dos puntos infinitamente próximos en S', que solo depende de la velocidad de rotación instantánea de S', **Ω**, porque la diferencia de velocidades de arrastre es igual a la velocidad del giro en S del segmento infinitesimal fijo en S' que une las dos posiciones de la partícula[2]. Análogamente, el segundo término de Coriolis, al que hemos llamado de arrastre vectorial, al deberse al giro del vector velocidad relativa considerado fijo en S', solo depende de dicho vector **v** y de **Ω**. Por tanto, tampoco depende de la aceleración angular. Ambos dependen solo de **v** y de **Ω**.

b) Si **v** es paralela a **Ω**, es decir, el objeto tiene velocidad relativa en la dirección del eje instantáneo de giro de S', ambos términos complementarios se anulan. El primero porque la velocidad de arrastre es la misma en puntos situados en una paralela al eje de giro, y el segundo porque un vector velocidad paralelo al eje de giro se desplaza paralelamente a sí mismo, es decir, no varía como vector. Así que el término complementario de Coriolis es debido exclusivamente a la componente de la velocidad relativa situada en el plano ortogonal al eje de giro. Supondremos entonces que hemos descompuesto la velocidad relativa **v** en sus componentes paralela y ortogonal al eje de giro, y consideraremos a partir de ahora en exclusiva el movimiento en dicho plano, conservando las notaciones para las velocidades y aceleraciones, de modo que **v** designa a la componente de la velocidad relativa en el plano ortogonal.

c) el término complementario de arrastre puntual tiene módulo Ω v, y es ortogonal a **v**. En efecto, en un lapso infinitesimal dt, la partícula se mueve en S' una distancia v dt, y la diferencia de velocidades de arrastre en ese intervalo es ortogonal al mismo[3] y de módulo Ω v dt, ya que el segmento de longitud v dt gira a esa velocidad angular, como todo el sistema S'.

d) el término complementario de arrastre vectorial es idéntico el anterior. En efecto, el vector **v**, tomado solidario a S', efectúa en dt un giro infinitesimal de ángulo Ω dt, y su desplazamiento es perpendicular a **v**, y de módulo v Ω dt.

Hemos completado la deducción del término complementario de Coriolis, que en resumen, está en el plano ortogonal al eje de giro instantáneo de S' respecto a S, y es perpendicular a la componente de la velocidad relativa situada en dicho plano. Su sentido es hacer girar a la componente ortogonal de la velocidad relativa **v** en el mismo sentido que el giro de S', y su módulo vale 2 Ω v.

Una derivación a partir del desplazamiento

Se puede dar un argumento para demostrar la aceleración de Coriolis basándose en un cuidadoso análisis del desplazamiento infinitesimal del móvil respecto a la referencia relativa[4]. Sea un observador situado en un punto P fijo de un sistema giratorio S'. Supongamos que en t=0 un móvil Q parte de P con velocidad relativa **v** y sin aceleración absoluta, **A** = **0**. Nos proponemos calcular cómo ve el observador en P el movimiento respecto a su sistema S'. Para ello es útil imaginar un tercer sistema de referencia S'' que en t=0 coincide con S', pero animado de la velocidad de arrastre Ω r de P en t=0 y sin giro, es decir, en traslación uniforme. Respecto de S'' el móvil Q se desplaza con velocidad uniforme **v** y en un tiempo elemental dt habrá cubierto un desplazamiento elemental, respecto del punto P'' que coincide en t=0 con P pero está fijo en S'', **D1** =P''Q= **v** dt. Tras el lapso dt el punto P fijo en S' no coincidirá con P'', sino que habrá recorrido un arco circular de la misma longitud Ω r dt que la recorrida linealmente por P''. El desplazamiento relativo de P'' respecto de P en dt se debe pues a la aceleración de arrastre centrípeta de P, y vale, hasta infinitésimos de 2º orden, **D2**= PP''= -1/2 $\mathbf{A_a}$ dt²[5].

Pero además el sistema S' ha girado un ángulo Ω dt en el tiempo dt respecto de P[6], y por tanto P ve a Q girado en sentido opuesto el mismo ángulo, lo que da otro desplazamiento de segundo orden, perpendicular a **D1** y de módulo D3 = D1 Ω dt= Ω v dt²[7]. En consecuencia, hasta el segundo orden en dt, el movimiento relativo visto por P de Q en dt se compone de: un único término de primer orden **D1**, que al derivar respecto al tiempo da la velocidad relativa **v** como era de esperar, y de los términos de segundo orden **D2** y **D3**, que al derivar dos veces dan la aceleración. **D2** da la aceleración de arrastre cambiada de signo, y **D3** la aceleración de Coriolis cambiada de signo, de módulo por tanto 2 Ω v. Hemos probado que para **A=0** se tiene $\mathbf{a} = -\mathbf{A_a} - \mathbf{A_c}$, con lo que hemos terminado la deducción[8].

Casos particulares

Para profundizar en el significado del término de Coriolis merece la pena analizar con cierto detenimiento los dos casos particulares más destacados por la simetría de un movimiento giratorio, el caso de velocidad puramente tangencial y puramente radial.

1. Velocidad relativa perpendicular al radio vector.

Consideremos en primer lugar que el objeto tenga una velocidad relativa perpendicular al radio vector que lo une con el centro de giro en el plano. Como el término de Coriolis vimos que no depende de la aceleración relativa del objeto, usemos de esta libertad para suponer el movimiento más sencillo posible en este caso, a saber, que el objeto describe en S' una trayectoria circular, con velocidad relativa v. En el movimiento en S, el objeto describe un círculo con velocidad Ω r + v, con lo que su aceleración absoluta, como es sabido, es la centrípeta $(\Omega r + v)^2/r = \Omega^2 r + v^2/r + 2 \Omega v$. El primer término de esta expresión es la aceleración de arras-

[2] Si hay aceleración angular de S' da un infinitésimo de mayor orden.

[3] En efecto, si tenemos un segmento de longitud fija moviéndose en una referencia S, la ligadura de conservación de la longitud exije que las proyecciones a lo largo del segmento de las velocidades instantáneas de sus dos extremos coincidan. Por tanto el vector diferencia de las velocidades de sus extremos no tiene componente a lo largo del segmento, luego yace en el plano ortogonal al segmento.

[4] El razonamiento se basa en que si un móvil tiene velocidad y aceleración instantáneas **v** y **a** respectivamente, el desplazamiento s a partir de t=0 vale **s** = **v** t + ½ **a** t² + términos al menos de orden 3 en t, como se puede comprobar derivando hasta dos veces en t=0. Por tanto se puede determinar **a** conociendo **s** hasta infinitésimos de 2º orden en dt.

[5] El giro elemental en dt del vector radial $\mathbf{A_a}$ es un infinitésimo de primer orden en dt, que da una modificación de tercer orden a **D2**.

[6] Vectorialmente, si **r** es el vector de posición de P respecto al origen, su velocidad absoluta es $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, de modo que para un punto Q de S' en **r'** su velocidad relativa respecto de P vale $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r'} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r'} - \mathbf{r})$ que demuestra que Q gira respecto de P con la misma velocidad angular **Ω**.

[7] La modificación de segundo orden debida a este giro de **D2** es de tercer orden, al ser **D2** de segundo orden, y se puede despreciar.

[8] En ocasiones se encuentra esta deducción basada en el desplazamiento para el caso de movimiento con velocidad relativa puramente radial, pero incompleta al no incluir el desplazamiento debido a la aceleración de arrastre, lo que simplifica notablemente el razonamiento. No se puede considerar este proceder riguroso, ya que para deducir las aceleraciones hay que considerar todos los desplazamientos hasta el segundo orden en dt, y tan de segundo orden es el debido a la aceleración de Coriolis como el debido a la aceleración de arrastre.

tre A_a (pues la velocidad de un punto fijo en S' es Ω r), el segundo la aceleración relativa A_r del movimiento circular en S' puramente centrípeta en este caso, por tanto el término restante tiene que ser igual al término complementario de Coriolis. En este caso podemos decir de que el término de Coriolis tiene una naturaleza centrípeta, es una especie de término centrípeto complementario.

Este resultado, obtenido de forma tan rápida, se puede generalizar a cualquier dirección de **v** razonando como sigue: consideremos un tercer sistema de referencia S'', fijo con respecto a S', pero con el origen justo en la posición de la partícula en t. Respecto de S'' la aceleración de Coriolis es la misma que respecto de S', dado que dicha aceleración solo depende de **v** y de **Ω**, y ambas son las mismas tomando S' o S'' como referencia relativa. Pero es evidente que respecto de S'' no hay ninguna dirección preferente para la velocidad **v** de la partícula. Por tanto concluimos que para cualquier dirección de **v** la aceleración de Coriolis tiene la misma expresión que la deducida arriba. Creo que esta es la forma más rápida de llegar a la expresión de la aceleración de Coriolis, demostrar en primer lugar que solo depende de Ω y de **v**, y generalizar a partir de movimiento relativo circular.

2. Velocidad relativa en sentido radial.

Este caso tiene una estrecha relación con una de las leyes básicas de la mecánica, la conservación del momento angular. En su forma más básica, puramente cinemática, esta ley dice que, considerando el movimiento de un objeto puntual con velocidad constante en el plano determinado por la recta de la trayectoria y el origen O, el producto $r\,v_t$ es constante, siendo v_t la velocidad normal al radio vector r en cada momento. Recordemos que esta ley no es más que la expresión de una sencilla propiedad geométrica, que el objeto barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto se deduce trazando desde la recta de la trayectoria la perpendicular al punto O, y expresando el área barrida en un tiempo dado como la mitad del producto de la longitud de la perpendicular por la distancia recorrida por el objeto dicho tiempo, y recordando que el objeto se mueve con velocidad uniforme. Como es sabido, la 2º ley de Kepler generaliza lo anterior al caso de un campo de fuerzas centrales.

Para deducir en este caso el término de Coriolis de la anterior ley, usamos de nuevo el hecho de que la aceleración de Coriolis solo depende del estado de movimiento (velocidad) instantánea del objeto, no de su aceleración, y suponemos que en el instante considerado describe un movimiento con velocidad uniforme en S (sin aceleración absoluta), con velocidad relativa v puramente radial. Su velocidad tangencial en S vale en general Ω r + u, siendo u la componente tangencial de la velocidad relativa (que hemos supuesto nula inicialmente). La conservación del momento angular da d[r (Ω r + u)]/dt = 0, que sustituyendo u = 0 después de derivar conduce a du/dt = - 2 Ω v. Este término dará finalmente la aceleración de Coriolis, pero todavía hay que hacer varias consideraciones.

Proyectemos la ecuación **Ac = A - Aa - a** en la dirección tangencial, recordemos que hemos supuesto **A** = 0. La aceleración de arrastre $\mathbf{A_a}$ es en este caso la aceleración centrípeta de la partícula debida al giro de S', que tiene dirección radial, por tanto no contribuye a la proyección tangencial. La aceleración relativa **a** requiere cuidado, porque estamos considerando un sistema de coordenadas polares en S' cuyos vectores unitarios radial y tangencial siguen a la partícula en su movimiento. Estos vectores giran si la partícula posee velocidad tangencial, pero en este caso solo tiene velocidad radial y estos vectores se desplazan paralelamente a sí mismos y por tanto no giran. En consecuencia **a** solo contiene las contribuciones provenientes de las derivadas de la velocidad radial y tangencial con sus vectores unitarios invariables. En suma, la componente tangencial de **a** es simplemente du/dt. Concluimos que la componente tangencial de $\mathbf{A_c}$ vale - du/dt = 2 Ω v[9].

También podemos analizar este caso basándonos en consideraciones energéticas. Partimos del teorema cinemático básico de la energía cinética aplicado a una partícula en movimiento con aceleración **a** en cualquier sistema de referencia. En forma diferencial tenemos **a.ds** = **dv**/dt.**ds** = **dv.v** = ½ d v². Lo aplicamos a una partícula que en el sistema S' se mueve con velocidad puramente radial v y esta vez sin aceleración relativa, es decir, en S' se mueve con velocidad uniforme v a lo largo de un radio (de nuevo nos valemos de que la aceleración de Coriolis no depende de la aceleración de la partícula). Aplicamos el anterior teorema de la energía cinética en forma diferencial en el sistema S. En este sistema la velocidad radial es la misma que en S', v, pero la velocidad tangencial U vale U = Ω r. En el tiempo infinitesimal dt la partícula se desplaza en S un segmento dr = v dt en sentido radial, y un segmento d q = Ω r dt en sentido tangencial. La aceleración **A** en S se descompone en **A** = $\mathbf{A_a}$ + $\mathbf{A_c}$ ya que hemos supuesto **a** = **0**. Se tiene **A.ds** = A_a dr + A_c dq, al ser $\mathbf{A_a}$ radial por ser la aceleración centrípeta y $\mathbf{A_c}$ tangencial; por tanto **A. ds** = $-\Omega^2 r\,dr + A_c\,dq = \Omega^2 r\,v\,dt + A_c\,\Omega\,r\,dt$. Aplicando el teorema cinético tenemos $-\Omega^2 r\,v\,dt + A_c\,\Omega\,r\,dt = \frac{1}{2} d\,V^2 = \frac{1}{2} d(U^2 + v^2) = \frac{1}{2} d(U^2)$ (al ser v = cte) = $\frac{1}{2} d(\Omega^2 r^2) = \Omega^2\,r\,v\,dt$. Despejando obtenemos finalmente $A_c = 2\,\Omega\,v$.

3. El caso de la atmósfera.

Así pues, la aceleración de Coriolis para la componente tangencial del movimiento está íntimamente relacionada con la aceleración centrípeta, y para la componente radial con la conservación del momento angular. En la atmósfera, considerando como es habitual en la dinámica atmosférica las componentes horizontales, la componente zonal del viento da lugar a una aceleración de Coriolis meridiana de origen centrípeto, y la componente meridiana del viento a una aceleración de Coriolis zonal derivada de la conservación del momento angular. Esto es válido con la suposición habitual de que los movimientos verticales son despreciables frente a los horizontales, lo que es admisible en escalas horizontales suficientemente amplias en que la estratificación hidrostática de la atmósfera restringe relativamente mucho los movimientos verticales frente a los horizontales. En casos en que esto no sea

[9] Dando por conocido que la aceleración de Coriolis es perpendicular a la velocidad relativa, deducimos que en este caso solo tiene componente tangencial, pero este hecho no se puede deducir de consideraciones de momento angular exclusivamente.

[10] Para una masa con velocidad zonal U ~ 50 m s^{-1} como en vientos del chorro en latitudes medias, donde el parámetro de Coriolis para la componente vertical de la aceleración de Coriolis f' = 2 Ω cos (φ) ~ 10^{-4} m s^{-1}, la componente vertical de la aceleración de Coriolis f' U equivale, en términos de flotabilidad, a una ΔT dada por g ΔT/T = f' U, ΔT ~ 0.15 ºC.

En los movimientos verticales del aire la aceleración de Coriolis vertical es despreciable frente a la flotabilidad. Para una masa de ΔT respecto del ambiente de 10 ºC la aceleración arquimediana de flotabilidad es b ~ g/30 (10/T ~1/30), mientras que con un parámetro de Coriolis para movimiento vertical 2 Ω cos (φ) ~ 10^{-4} s^{-1} , la aceleración deflectora de Coriolis suponiendo velocidad de ascenso/descenso ~ 10 m s^{-1} es ~ g / 10000 ~ b / 300, por tanto despreciable respecto a la flotabibilidad.

admisible es necesario considerar también la componente de la aceleración de Coriolis en sentido vertical derivada del movimiento zonal (que al contrario que el parámetro de Coriolis, es máxima en el ecuador y mínima en los polos)[10]. La componente vertical de la aceleración de Coriolis en movimiento zonal incrementa la flotabilidad de las masas que soplan del O, y la reduce correlativamente en las que vienen del E.

Aspectos dinámicos

El análisis de la aceleración relativa permite, como es sabido, analizar el movimiento en cualquier sistema de referencia introduciendo unas fuerzas ficticias de inercia. Se parte de un sistema absoluto S que además es galileano, de tal forma que en él rige la 2º ley de Newton, y m **A** = **F** siendo **F** la resultante de las fuerzas verdaderas aplicadas a la partícula de masa m. Entonces de m **a** = m**A** – m$\mathbf{A}_a$ – m$\mathbf{A}_c$ = **F** – m$\mathbf{A}_a$ – m$\mathbf{A}_c$ deducimos que en el sistema S' todo sucede como si además de la fuerza real F actuaran sobre la partícula dos fuerzas ficticias de inercia, una debida a la aceleración de arrastre (con una componente centrífuga), y otra debida a la aceleración complementaria. A esta última se le llama fuerza de Coriolis, y como se ve tiene un signo opuesto a la aceleración de Coriolis, es decir, tiende a hacer girar al vector velocidad relativa en sentido opuesto al del giro del sistema S'. Estas fuerzas, aunque se denominan ficticias, dan lugar a efectos muy reales cuando se analiza el movimiento desde un sistema no inercial galileano. Es importante darse cuenta de que son fuerzas másicas, es decir, afectan a cada partícula de un sistema en virtud tan solo de su masa, aunque sobre la partícula no actúe ninguna fuerza real. En este carácter de fuerzas másicas solo tienen una contrapartida entre las fuerzas reales de la física en la fuerza de la gravedad. Por tanto podemos cancelar completamente el efecto de la gravedad, al menos localmente (mientras la fuerza de gravedad se pueda considerar paralela), con tal de pasar a un sistema S' con $\mathbf{A}_a$= **g** y sin giro con relación a S de forma que la fuerza de Coriolis se anule. En este sistema la dinámica se rige por la ecuación m **a** = **F'** en la que **F'** es la resultante de todas las fuerzas verdaderas no gravitatorias (electromagnéticas, de contacto, etc.). Por tanto en S' toda la mecánica sucede como si el sistema S' fuera inercial galileano y no hubiese gravedad. Esto es lo que sucede en el fenómeno llamado de ingravidez (aparente), cuando un satélite orbita alrededor de la tierra, o un avión describe una trayectoria en caída libre. La teoría de la Relatividad General de Einstein parte de su principio de Equivalencia, que viene a decir que no sólo la mecánica, sino toda las leyes de la Física (electromagnetismo, etc.) son las mismas en un tal S' que en un sistema inercial galileano sin fuerzas gravitatorias[11].

Conservación del momento angular en campo de fuerzas centrales a partir de aceleración de Coriolis

Por su importancia veamos la demostración de este resultado usando la aceleración de Coriolis. La partícula se mueve en la referencia S, en este caso galileana para aplicar la 2ª Ley de Newton, que siendo la fuerza verdadera exclusivamente radial, nos da en coordenadas polares A_t =0. Consideramos en un instante dado una referencia S' que gira con velocidad angular igual a la de la partícula en ese instante, determinada por su velocidad tangencial, $\Omega = V_t/r$, y tomamos también coordenadas polares en S'. Se tiene proyectando sobre la tangente, $0 = A_t = A_{at} + a_t + A_{ct}$. La aceleración de arrastre es exclusivamente centrípeta, por lo que A_{at}=0. En cuanto a a_t, razonando como antes que, en un sistema de coordenadas polares si el movimiento es puramente radial, como es el caso dada la elección de Ω (que anula v_t en S'), los vectores unitarios tangencial y radial tienen derivada nula, $a_t = d\,v_t/dt$. El término de Coriolis, al ser la aceleración de Coriolis perpendicular a **v**, es decir, puramente tangencial, de módulo 2 Ω v, nos da finalmente $d\,v_t/dt + 2\,\Omega\,v = 0$. Por otra parte, usando que $v_t = V_t - \Omega\,r$ sacamos que $d\,v_t/dt = d\,V_t/dt - \Omega\,v$, sustituyendo $d\,V_t/dt + \Omega\,v = 0 = d\,V_t/dt + V_t/r\,dr/dt$. llegamos a $d\,(r\,V_t)/dt = 0$, que es la ley de conservación del momento angular.

En consecuencia no hay propiamente nada en la ley de conservación del momento angular que no se pueda ver igualmente usando Coriolis, y a menudo es Coriolis más intuitivo. En el típico ejemplo del patinador para ilustrar la conservación del momento angular, el patinador de hielo al extender los brazos disminuye su velocidad angular, y viceversa. Cualquier persona con conocimientos de física dirá que se debe a la conservación del momento angular, pero preguntado exactamente qué fuerzas hacen que el patinador se frene/acelere la cosa es menos clara. La respuesta es que es la fuerza de Coriolis que se experimenta en el sistema relativo que gira instantáneamente con él. Para centrar ideas, en el problema análogo de una bola que se mueve sin rozamiento dentro de un tubo que gira con velocidad angular constante, con una velocidad radial v dada, tomando el sistema S' con la misma velocidad angular del tubo, la bola experimenta la reacción lateral tangencial del tubo como única fuerza real. Como el término de arrastre es centrífugo no da componente tangencial, y la aceleración relativa solo puede ser radial también, por lo que deducimos que la reacción del tubo es igual y opuesta a la fuerza de Coriolis sobre la bola. Esta fuerza tiende a disminuir la velocidad de giro para velocidad radial positiva, y viceversa. Este ejemplo ilustra bien que las fuerzas de Coriolis, aunque ficticias inerciales, dan lugar a fenómenos perfectamente reales. En mi opinión, sería bueno en la didáctica de la Mecánica dar más peso a las aceleraciones de Coriolis como complemento a las consideraciones de momento angular, porque aquellas son intuitivas cuando se analizan, pero el estupendo aparato matemático vectorial empleando para la demostración de los teoremas de conservación del momento angular, o las ecuaciones de Euler del movimiento del sólido, oscurecen al mismo tiempo el origen dinámico concreto de los fenómenos.

Energía cinética y aceleración de Coriolis

Al igual que el resto de las leyes de la mecánica, el teorema de la energía cinética se cumple también en el movimiento relativo, con tal de añadir a las fuerzas reales las inerciales. Como es sabido, la fuerza de Coriolis no efectúa trabajo en el movimiento relativo, al ser siempre ortogonal

[11] Para alguien familiarizado con la dinámica de fluidos, o la dinámica atmosférica en particular, donde las fuerzas ficticias inerciales juegan un papel destacado, no deja de causar cierta perplejidad que Einstein dijera que su intuición más afortunada fuera que en un sistema en caída libre la gravedad aparentemente se anula. Parece a primera vista un hecho relativamente elemental de la mecánica, aunque por supuesto Einstein tuvo la genial intrepidez de extenderlo a toda la Física para así fundamentar su teoría de la Relatividad General. Quizá quepa interpretar esta anécdota como un testimonio indirecto de que las fuerzas ficticias no inerciales estuvieron un tanto orilladas en el tratamiento estándar de la mecánica, a favor del principio de conservación del momento angular por ejemplo.

al desplazamiento, que tiene la dirección del vector velocidad instantánea relativa. Volviendo al ejemplo de la bola y el tubo giratorio sin rozamiento, el teorema de la energía cinética en el sistema giratorio dice que la variación de energía cinética relativa de la bola se debe al trabajo exclusivo de la fuerza inercial centrífuga, dado que tanto la fuerza real del tubo como la de Coriolis son ortogonales al desplazamiento relativo puramente radial[12]. Esto no está en contradicción con el hecho de que, aplicado dicho teorema en el sistema absoluto, las fuerzas de reacción del tubo efectúan un trabajo (real), igual al aumento de energía cinética absoluta de la partícula, dado que son las únicas fuerzas verdaderas que actúan en dicho sistema[13].

El caso del patinador puede ser asimilado al caso en que la bola en el interior del tubo (que gira sin rozamiento) está unida al centro por un resorte, en la posición inicial el resorte está en posición relajada, la bola sujeta a una distancia radial dada y girando con una determinada velocidad angular. Se suelta el tope y la bola empieza a alejarse radialmente tensando el resorte que va ganando energía potencial, por tanto la bola debe perder energía cinética absoluta. En cualquier momento mientras la bola tensa al muelle, en S' que gira a la misma velocidad que la bola, la única fuerza real es la tensión del muelle, la fuerza de Coriolis no hace trabajo, solo queda la fuerza de arrastre centrífuga, que es la que hace trabajo para que el muelle gane energía potencial. Visto desde el sistema S, la bola pierde una energía cinética igual al aumento de energía potencial del muelle, conservando su momento angular al ser la fuerza central. Cuando el muelle alcanza su máxima distensión, se invierte el proceso naturalmente, siempre suponiendo ausencia de pérdidas por fricción[14].

Aceleración centrípeta deducida de aceleración de Coriolis

Como curiosidad, también la aceleración centrípeta se puede derivar de la aceleración de Coriolis. Ya vimos que la aceleración de Coriolis se puede deducir de la aceleración centrípeta, a la inversa se puede razonar de esta forma: en general, si un móvil tiene en un instante dado la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$, si se invierte la dirección del tiempo, mirando la trayectoria por así decirlo con la película invertida, su velocidad pasa a ser la opuesta, $\mathbf{v'} = -\mathbf{v}$, pero su aceleración es la misma $\mathbf{a'} = \mathbf{a}$ (como se deduce de que la velocidad es una primera derivada temporal, la aceleración una derivada segunda temporal). Por tanto, al cambiar de signo la velocidad angular de un sistema S' se invierten las velocidades de cada punto, pero se conservan las aceleraciones de arrastre. Tomemos ahora en la referencia S' que gira respecto a S a la velocidad Ω una partícula que describe una trayectoria circular en S', con velocidad angular respecto a este sistema – Ω. Está claro que dicha partícula está en reposo en S y por tanto $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Por otra parte, su aceleración de arrastre $A_\mathbf{a}$ debida al giro de S' a velocidad Ω es la misma que su aceleración relativa $\mathbf{A_r}$ respecto a S' (por ser debida a un giro a velocidad -Ω). Por tanto tenemos $\mathbf{0} = \mathbf{A} = \mathbf{A_a} + \mathbf{A_r} + \mathbf{A_c} = 2\,\mathbf{A_a} + \mathbf{A_c}$, luego $\mathbf{A_a} = -1/2\, \mathbf{A_c}$, que es un vector de módulo $\Omega v = \Omega^2 r$ y dirección centrípeta c.q.d.

Fenómenos giroscópicos

En el tratamiento habitual de los fenómenos giroscópicos, su origen concreto dinámico queda casi siempre velado por el aparato de las ecuaciones del momento angular de Euler, que desde luego permiten un análisis completo. Sin embargo, una vez que se comprenden las fuerzas de Coriolis, estos fenómenos pierden su halo de misterio. Consideremos un experimento casero típico: una persona sujeta, con ambos brazos extendidos horizontalmente, una rueda de bicicleta por su eje, y después de imprimirle un giro rápido sobre su eje, hace que gire alrededor de un eje vertical acercando una mano y alejando la otra. Tomando un sistema coordenado con el plano XY horizontal, y el eje X perpendicular a la persona, la rueda en el instante inicial está en el plano XZ. Como es sabido, al aplicar con las manos el giro de eje Z aparece un par giroscópico, que según la ecuación de Euler se debe a la variación del momento angular de la rueda (que inicialmente está sobre el eje Y).

Para ver qué aceleraciones en concreto provocan la aparición del momento, analicemos el movimiento en un sistema S' que gira sobre el eje Z a la misma velocidad angular que la rueda. En este sistema, tomando un sector circular elemental de la rueda, expresemos la fuerza real en función de la fuerza de arrastre, relativa y de Coriolis, y proyectemos sobre un eje ortogonal al plano de la rueda inicialmente (eje Y). De las tres aceleraciones, tanto la de arrastre, centrípeta con relación al eje vertical Z y perpendicular al mismo, como la aceleración relativa debida al giro de la rueda sobre su eje, centrípeta con relación al centro de la rueda, yacen en el plano de la rueda XZ, y se compensan por las tensiones de los radios y estructura de la misma. La que queda, la de Coriolis, es perpendicular al plano de la rueda y su módulo depende de la posición del elemento de rueda, máxima para un elemento sobre el eje Z, nula para un elemento sobre el eje X. Se ve además que en elementos de rueda simétricos respecto al centro se reducen a un par de fuerzas, al tener resultante nula, por tanto integrando dan lugar a un momento, que es obviamente el mismo que se deduce aplicando las ecuaciones de Euler[15]. En suma, cabe afirmar que la razón del carácter misterioso o paradójico de los pares giroscópicos, y también por tanto de su tendencia a conservar la dirección del eje de giro que los hace tan útiles, radica en último análisis en la aparición de fuerzas de Coriolis.

AGRADECIMIENTOS. Al compañero meteorólogo Ricardo Torrijo Murciano por las interesantes conversaciones y sugerencias sobre este tema.

Referencias

● **Anders Persson: How Do We Understand the Coriolis Force?, Bulletin of the American Meteorological Society. Vol. 79 (7), 1998, p. 1373–1385**

[12] Esta energía cinética del movimiento relativo es la debida a la velocidad radial exclusivamente; el hecho de que se deba al trabajo de la fuerza inercial centrífuga se deduce inmediatamente de la correspondiente ecuación de Lagrange para el sistema con único grado de libertad la distancia radial.

[13] Si la bola se mueve libremente (sin la constricción del tubo) con velocidad instantánea relativa puramente radial en S', el teorema diferencial de la energía cinética en este sistema da el mismo resultado que con el tubo, dado que la fuerza real del tubo no hace trabajo, solo la fuerza ficticia inercial centrífuga. En el sistema S' por tanto la energía cinética aumenta, pero se conserva en este caso evidentemente en S, dado que no actúan fuerzas reales sobre la bola.

[14] Suponiendo la masa de la bola la unidad, su momento angular $L = r^2 \omega$ se conserva al ser la fuerza del muelle central; por otra parte su energía cinética de rotación es $2 K_R = \omega^2 r^2$, sustituyendo, $2 K_R = L^2 / r^2$, luego crece al contraerse el muelle. Por otra parte, la ecuación del movimiento radial del muelle, obtenida en el sitema S' que gira en un instante dado con su misma ω, da $d^2 r / dt = \omega^2 r - k (r - r_0)$, siendo k la constante elástica del muelle y r_0 su posición de distensión. Aplicando la conservación de L obtenemos $d^2 r / dt = L^2 / r^3 - k (r - r_0)$ que no contiene más incógnitas que r y por tanto lo determina dadas las condiciones iniciales de (r, dr/dt).

[15] Para ello hay que descomponer la velocidad relativa debida al giro de la rueda sobre su eje en sus componentes horizontal y vertical, solo la primera da aceleración de Coriolis.