Una generalización de las descomposiciones

APLICADAS A LA CIRCULACIÓN GENERAL

JOSÉ A. LÓPEZ DÍAZ

En los estudios de la circulación general atmosférica u oceánica se utilizan descomposiciones de promedios de productos de variables climáticas para permitir el análisis de sus variaciones conjuntas en distintas escalas. Un ejemplo es el estudio del transporte meridional de energía térmica, para el que se parte de las anomalías de la componente meridional V de la velocidad y de la temperatura T respecto de sus promedios zonal y temporal. Notando por $\underline{A}$ al promedio temporal de una variable A y por A' a su anomalía temporal, $A'=A-\underline{A}$, y por [A] y A* al promedio y anomalía zonales respectivamente, se tiene la descomposición (ver p. ej. Hartmann, cap.6):

$$[\underline{V\ T}]=[\underline{V}][\underline{T}]+[\underline{V}^*\underline{T}^*]+[\underline{V'\ T'}] \qquad \text{(Des.1)}$$

que representa el promedio de transporte meridional de energía térmica a lo largo de un círculo de latitud dado en suma de tres términos: transporte por la circulación meridional media, los remolinos ('eddies') estacionarios y los remolinos transitorios.

En ocasiones se hace una descomposición que contiene un término más que es un promedio del producto de anomalías dobles (p.ej. en Peixoto, cap. 4):

$$[\underline{V\ T}]=[\underline{V}][\underline{T}]+[\underline{V}^*\underline{T}^*]+\underline{[V]'[T]'}+\underline{[(V)^{*\prime}(T)^{*\prime}]} \qquad \text{(Des.2)}$$

En el presente artículo abordo un intento de sistematizar este tipo de descomposociones partiendo de un análisis de las propiedades de unos operadores promedio que generalizan los usados en las descomposiciones anteriores. Esto permitirá llegar a dos generalizaciones de las descomposiciones (Des.1) y (Des.2).

Operadores promedio y sus propiedades

Partimos de una variable cualquiera X que depende de M índices (como longitud, tiempo, coordenada vertical,…), X=X (a,b,c,..). La variable X está definida en un dominio de la forma [a1, a2]x[b1, b2]x….., es decir, la generalización de un rectángulo en dos dimensiones al número de dimensiones M. Denotemos al conjunto de índices por $\Omega=\{a,b,c,\ldots\}$, y a un subconjunto cualquiera de Ω por J. Al resultado de promediar la variable X sobre todos los índices no incluidos en J lo denotemos por J/X. De acuerdo con esta definición, la variable J/X depende tan solo de los índices del subconjunto J. Por ejemplo, si Ω consta de las dimensiones (longitud, tiempo y coordenada z), y J={longitud, tiempo}, la variable J/X es un promedio sobre la variable z. Diremos que J es un operador promedio, y usaremos la misma letra para denotar el conjunto de índices y el operador promedio correspondiente, según el contexto. Por tanto, la variable J/X dependerá tan solo de los índices incluidos en J; en el ejemplo anterior, J/X, al estar promediado en la vertical, dependerá tan solo de las otras dos dimensiones.

Dos casos particulares importantes son:

$$\Omega/X=X$$

$$\varphi/X=\langle X\rangle$$

La primera igualdad muestra que el operador promedio Ω deja la variable inalterada. En la segunda φ es el operador correspondiente al conjunto vacío, y expresa el promedio total de X respecto de todas sus dimensiones (un número por tanto), denotado por también por $\langle X\rangle$ de aquí en adelante.

Como al aplicar operadores promedio se obtienen nuevas variables que dependen de menos índices que los de partida Ω, denotaré el conjunto de índices de los que depende una variable X cualquiera por i(X), de modo que siempre $i(X) \subset \Omega$. De la definición de operador promedio resulta inmediatamente que

$$(^*)\ i(J/X) \subset J \qquad \text{(A1)}$$

Además es claro que siempre se cumple i(X)/X=X donde i(X) es el operador correspondiente al conjunto i(X), por tanto es un promedio sobre variables de las que no depende X, y no la modifica. Generalizando este razonamiento, tenemos la propiedad:

$$(^*)\ \text{Si } i(X) \subset J \text{ se cumple } J/X=X \qquad \text{(P0)}$$

De la linealidad de la integración se deriva inmediatamente la linealidad del operador J:

(*) Para números a y b cualesquiera,

$$J/(a\,X+b\,Y)=a\,J/X+b\,J/Y \qquad \text{(P1)}$$

Será muy útil operar con los operadores promedio como si fueran funciones al multiplicarlos por números y sumar:

$$(a\,J+b\,K)/X=_{DEF}a\,J/X+b\,K/X \qquad \text{(D1),}$$

donde el subíndice DEF indica que se trata de una definición. De esta forma definimos operadores promedio generalizados a base de combinar linealmente operadores promedio, para los que es fácil ver que se sigue cumpliendo la linealidad (P1).

Definimos como es habitual la composición de dos operadores promedio J y K como el resultado de aplicar J a K/X, y adoptamos el convenio de notación:

$$J/(K/X)=_{DEF}(J\,K)/X \qquad \text{(D2),}$$

Inmediatamente a partir de la definición de operador promedio sacamos la importante consecuencia de la conmutatividad de operadores promedio, como indica la notación:

$$(J\,K)/X=(K\,J)/X \qquad \text{(P2)}$$

(P2) no es otra cosa que la aplicación del teorema de Fubini que permite intercambiar el orden de las integrales en una integral múltiple sobre un dominio de forma rectangular en varias dimensiones como es el caso que estamos considerando para los operadores promedio. Es claro que la conmutatividad se generaliza a operadores promedio generalizados.

De (D1) y (D2) se deduce que, como indica el convenio notacional adoptado, podemos operar con la composición de operadores tanto simples como generalizados con las mismas reglas que si se tratara de un producto normal. Por ejemplo para operadores promedio arbitrarios J, K, L, M tenemos $(J+K)(L\text{-}M) = (J\ L - JM + K\ L - K\ M)$

Una propiedad fundamental de la composición de operadores promedio es:

$$(*)\quad (J\ K)/X = (J\cap K)/X \qquad \text{P3)}$$

donde el operador del segundo miembro es, como indica la notación, el correspondiente a la intersección de los conjuntos de índices correspondientes a los operadores del primer miembro. La demostración consiste básicamente en una contabilidad adecuada de los índices de promedio que operan. Al operar sobre X con el operador K, el promedio resultante solo puede depender de los índices incluidos en K, y al operar de nuevo sobre este promedio con el operador J, la variable resultante solo puede depender de índices incluidos en J. Por tanto $(J\ K)/X$ solo puede depender de índices comunes a J y K, y esto es lo que hace el operador promedio $(J\cap K)$.

En virtud de (P3) la composición de operadores promedio se reduce a un nuevo operador promedio. Por tanto esta propiedad, junto con las reglas algebraicas de expansión de expresiones conteniendo operadores promedio vistas, permitirá simplificar grandemente expresiones complicadas.

Promedios de productos de variables

Tras sentar las bases del cálculo con operadores promedio, pasemos a estudiar el objeto principal de este trabajo, la aplicación de operadores promedio sobre productos de variables X e Y arbitrarias. Es clave la siguiente propiedad que permite factorizar la expresión, y que es una generalización de (P0):

$$(*)\ \text{Si } i(X)\ C\ J \text{ se cumple } J/(X\ Y) = X\ (J/Y) \qquad \text{(P4)}$$

(P4) no es más que la conocida propiedad de la integración de productos de variables que permite sacar fuera de la integración aquellas variables que no dependen de las variables sobre las que se integra. Vemos que (P4) permite pasar del promedio de un producto a un producto de promedios.

En el caso de que el operador J sea el de promedio global φ podemos probar una igualdad que aplicaremos repetidamente más adelante en el estudio de promedios globales de productos. Para operadores promedio cualesquiera J y K:

$$(*)\ \varphi/(J/X\ K/Y) = \varphi/\{J/X\ (J\cap K)/Y\} \qquad \text{(P5)}$$

En la que como antes en el segundo miembro $J\cap K$ es el operador correspondiente al conjunto de índices $J\cap K$. Esta igualdad se prueba sustituyendo el operador φ por $\varphi\ J$ que es evidente a partir de (P3) ($\varphi \cap J = \varphi$) para obtener $\varphi/(J/X\ K/Y) = \varphi/\{J/(J/X\ K/Y)\}$ que en virtud de (P4) se transforma en $\varphi/\{ J/X\ (J\ K)/Y\}$ que tras aplicar de nuevo (P3) conduce a (P5).

Para estudiar las formas comunes de descomponer promedios de productos en sumas de términos resultará útil introducir otra notación para asociar a un operador promedio otro que representa una anomalía respecto al mismo. Definimos el operador de anomalía J* asociado al operador J por la igualdad operacional

$$J^* =_{DEF} (\Omega - J) \qquad \text{(D3)}$$

De la definición anterior se deduce la descomposición operacional $\Omega = J + J^*$, que denominaremos en adelante *descomposición de la identidad*, y que está en la base de las igualdades para descomposición de promedios de productos que vamos a obtener.

Dos igualdades operacionales inmediatas usando (P3) son

$$(*) J\ J^* = J^*\ J = J(\Omega - J) = J - J = 0 \text{ y } \varphi\ J^* = \varphi\ (\Omega - J) = \varphi - \varphi = 0 \qquad \text{(P6)}$$

(no confundir el operador φ con el operador 0, definido por la última igualdad operacional $0 = J\text{-}J = 0\ J$ para cualquier J, para el que se tiene claramente $0/X = 0$, pero en cambio $\varphi/X = \langle X \rangle$).

Otro convenio de notación útil para simplificar la repetición de las variables arbitrarias X e Y cuando operemos sobre productos es, dados operadores arbitrarios J, K, L:

$$J/(K/X\ L/Y) = J/(K^{(1)}\ L^{(2)}),$$

es decir, los operadores afectados del superíndice (1) actúan sobre una variable genérica X y los afectados por el superíndice (2) actúan sobre la otra variable Y. En el caso frecuente en lo que sigue de que coincidan los operadores K y L simplificaremos la escritura aun más:

$$J/(K/X\ \ K/Y) = J/(K^{(1),(2)})$$

Descomposición de promedios de productos del primer tipo

Partimos de una serie de subconjuntos de índices disjuntos entre sí: J(1), J(2), …, J(k). Definimos los operadores S(m) como los correspondientes a los conjuntos $U_{i=1,2,..m}\ J(i)$, es decir, el operador S(m) corresponde a la unión de los J(i) para i=1,2,..,m. Haciendo $S(k+1) = \Omega$ y $S(0) = \varphi$, tenemos la descomposición de la identidad:

$$\Omega = (\Omega - S(k)) + (S(k)\text{-}S(k\text{-}1) + \ldots + (S(1)\text{-}\varphi) + \varphi$$

que da

$$\Omega\text{-}\varphi = (S(k+1) - S(k)) + (S(k)\text{-}S(k\text{-}1) + \ldots + (S(1) - S(0)) \qquad \text{(E1)}$$

Consideremos el promedio $\varphi/((\Omega\text{-}\varphi)^{(1)}\ (\Omega\text{-}\varphi)^{(2)}) = \varphi/((\Omega\text{-}\varphi)/X(\Omega\text{-}\varphi)/Y)$. Sustituyamos en ambos factores dentro del promedio global según la descomposición (E1). Al desarrollar el promedio en suma de promedio de productos aparecen términos de la forma $\varphi/(S(m)/X\ S(n)/Y)$, en que podemos suponer sin pérdida de generalidad $m<n$. Aplicando (P5) obtenemos $\varphi/(S(m)/X\ S(n)/Y) = \varphi/\{S(m)/X(S(m) \cap S(n))/Y\} = \varphi/(S(m)/X\ S(m)/Y)$. De esta se deriva fácilmente que los promedios de términos diferentes del segundo miembro de (E1), de la forma $\varphi/\{(S(m+1)\text{-}S(m))/X\ (S(n+1)\text{-}(S(n))/Y\}$ con $m \neq n$ se anulan sin más que expandir del producto de promedios. Quedan por tanto solo los k+1 términos con operadores promedio coincidentes sobre X e Y, lo que da la descomposición general del primer tipo, en notación abreviada:

$$\langle \Omega^{(1),(2)} \rangle = \varphi^{(1),(2)} + \Sigma_{k+1\geq i\geq 1} \langle (S(i)\text{-}S(i\text{-}1))^{(1),(2)} \rangle$$

Para el caso más simple de k=1, haciendo $S(1) = J$, tenemos en notación expandida:

Una generalización de las descomposiciones
APLICADAS A LA CIRCULACIÓN GENERAL

$<X\ Y> = <X><Y> + <(\Omega-J)/X(\Omega-J)/Y> + <(J-\varphi)/X(J-\varphi)/Y> = <X><Y> + <(X-J/X)/Y-J/Y)> + <(J/X-<X>)\ (J/Y-<Y>)>$

Un ejemplo de esta descomposición es la (Des.1) mostrada al principio, obtenida tomando como conjunto de índices Ω={longitud, tiempo}, y J como el operador promedio temporal correspondiente al conjunto J={longitud}. El término $<(X-J/X)\ (Y-J/Y)>$ representa el promedio total del producto de anomalías temporales, que es el último término [V' T'] de (Des.1), y el término $<(J/X-<X>)\ (J/Y-<Y>)>$ es el término [V*T*] de (Des.1), pero escrito en la forma operacional ligeramente distinta $K/\{(J/X-<X>)(J/Y-<Y>)\}$, siendo K el operador promedio zonal correspondiente al conjunto K={tiempo}. La equivalencia de ambas expresiones es una consecuencia de que en el caso de que una variable X no dependa de ningún índice de un conjunto K, $i(X) \cap K=\varphi$, se tiene $K/X=K/\{i(X)/X)\}=(K\ i(X))/X=\varphi/X$ en virtud de (A.2) y (P3).

Descomposición de promedios de productos del segundo tipo

Para el segundo tipo partimos de la descomposición de la identidad en un producto de descomposiciones de la identidad:

$$\Omega=\Pi_{i=1}^{k}\ (J(i)+J(i)^*)\quad \text{(E2)}$$

Al expandir el promedio $<XY>=\varphi\ ((\Omega/X\ \Omega/Y)$ sustituyendo en el segundo miembro los dos operadores identidad Ω por (E2), obtenemos productos de k operadores J(i) o J(i)*,i=1,2,…,k, aplicados a X, y otro producto del mismo tipo aplicado a Y. Sean P1 y P2 dos operadores del tipo indicado, aplicando (P5) a $\varphi/((P1/X\ P2/Y)$ tenemos $\varphi/((P1/X(P1\ P2)/Y)$. El operador P1P2 que se aplica sobre Y consta de 2xk productos de operadores J(i) o J(i)*. Tenemos los siguientes casos:

a) cualquier combinación en que los dos términos P1 y P2 no sean idénticos se anula, porque contendrá necesariamente para algún i un operador J(i) del primer factor con un J(i)* del segundo, o viceversa, y en virtud de (P6) es $J(i)J(i)^* = 0$ lo que anula el término.

b) quedan por tanto solo las combinaciones con el mismo operador en los dos, del tipo $\varphi/((P1/X\ P1/Y)$. Cualquier combinación de este tipo en que haya al menos dos J's y al menos un J* en P1 reduce el término a cero pues, por ejemplo, $J_1\ J_2\ J_3^* = \varphi\ J_3^*=0$ aplicando (P3) y (P6). Queda pues la única combinación sin ningún J*(i), que claramente en virtud de nuevo de (P3) equivale a φ, y por tanto reduce el término $\varphi/((\varphi/X\ \varphi/Y)=<X>\ <Y>$, y las k combinaciones que solo contienen un J(i) y el resto del tipo anomalía J(k)*.

Con esto llegamos al resultado, descomposición generalizada del segundo tipo, en notación sintética:

$$<\Omega^{(1),(2)}> = \varphi^{(1),(2)} + <(\Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*)^{(1),(2)}> + \Sigma_{1\le i\le k} <(J(i)\ \Pi_{k\neq i}\ J(k)^*)^{(1),(2)})> \qquad \text{[B]}$$

donde la notación $\Pi_{k\neq i}\ J(k)^*$representa el producto de todos los J(k)* menos J(i)*.

Para interpretar esta descomposición, veamos que los operadores

$$\Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*$$

producen una suerte de anomalías generalizadas en el siguiente sentido: supongamos que buscamos un operador promedio generalizado que aplicado a un X arbitrario produzca una variable tipo anomalía A/X, es decir, tal que $\varphi/(A/X)=0$. Este primer paso se consigue claramente con $A=\varphi^*$ pues $\varphi\ \varphi^*=0$ según (P6). Si también queremos que esté centrado respecto a un operador promedio dado J, es decir, que se cumpla también $J/(A/X)=0$, podemos conseguir esto definiendo $A=\varphi^*J^*$ y aplicando (P6), $J\ J^*=0$. Generalizando, si buscamos un operador A tal que su producto con cada uno de los operadores φ,J(1),J(2), …, J(k) sea 0, podemos tomar $A=\varphi^*\ \Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*$. Su interpretación será que produce anomalías centradas con respecto a cada promedio J(i). Además en realidad sobra el φ^* en la anterior expresión, pues $\varphi\ \Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*=0$ ya que $\varphi\ J^*=0$ para cualquier J (P6).

Por otra parte los términos de la forma $<(J(i)\ \Pi_{k\neq i}\ J(k)^*)^{(1),(2)})>$ se pueden simplificar considerablemente. Operando por ejemplo con el primer término de este tipo obtenemos:

$J(1)\ J(2)^*….J(k)^*=J(1)\ (\Omega-J(2))\ J(3)^*….\ J)k)^*=(J(1)-\varphi)\ J(3)^*….\ J)k)^*=J(1)\ J(3)^*….\ J)k)^*-\varphi\ J(3)^*….\ J)k)^*=J(1)\ J(3)^*….\ J)k)^*-0=….=J(1)\ J(k)^*=J(1)\ (\Omega-J(k))=J(1)-\varphi$. Por tanto la descomposición generalizada del segundo tipo se expresa en la forma equivalente:

$$<\Omega^{(1),(2)}>=\varphi^{(1),(2)}+\Sigma_{1\le i\le k}<(J(i)-\varphi)^{(1),(2)})>+<(\Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*)^{(1),(2)}>$$

También podemos operar de forma similar con el término de anomalías generalizadas, lo que da, denotando para cualquier operador J por $J^a=J-\varphi$, siendo J^a es la anomalía del operador promedio J, la expresión $\Pi_{1\le i\le k}\ J(i)^*=\Omega^a-\Sigma_{1\le i\le k}\ J(i)^a$. Por tanto la descomposición del segundo tipo se puede expresar en función exclusivamente de anomalías de promedio en la forma:

$$<\Omega^{a(1),(2)}>=\Sigma_{1\le i\le k}<J(i)^{a(1),(2)})>+<(\Omega^a-\Sigma_{1\le i\le k}\ J(i)^a)^{(1),(2)}>$$

En la que en el primer miembro hemos usado la igualdad $<\Omega^{a(1),(2)}>=\ \Omega^{(1),(2)}>-\varphi^{(1),(2)}$ que no es otra cosa que la conocida descomposición de la covarianza de dos variables, y que por supuesto se prueba sin dificultad con las técnicas desarrolladas:

$$\mathrm{Cov}\ (X,\ Y)=E(X\ Y)-E(X)\ E(Y)$$

El caso más sencillo de descomposición del segundo tipo, k=1, conduce a una descomposición equivalente a la correspondiente al primer tipo. Para k=2 obtenemos la descomposición ilustrada en (Des.2) al principio del artículo. En efecto, haciendo J(1)=J y J(2)=K obtenemos:

$<X\ Y>=<X><Y>+<(J-\varphi)/X\ (J-\varphi)/Y>+<(K-\varphi)/X\ (K-\varphi)/Y>+<(\Omega-J)\ (\Omega-K)/X\ (\Omega-J)\ (\Omega-K)/Y>$

Se puede verificar sin dificultad que esta coincide con (Des.2) tomando J como el operador de promedio temporal y K el operador de promedio zonal.

Referencias

- Hartmann, D.L. (2016): *Global Physical Climatology,* Elsevier, ISBN: 978-0-12-328531-7
- Peixoto, J.P. y Oort, A.H. (1992): *Physics of Climate*, Springer, ISBN 978-0-88318-712-8