COLABORACION

Cálculo de las horas de insolación de una fachada

Por JOSE TAPIA CONTRERAS
Meteorólogo

Se incluye una versión de este problema por el interés que pueda tener para algunos de nuestros socios y colaboradores, que así lo han pedido. Es cuestión más astronómica que meteorológica; no obstante, su aspecto meteorológico puede resultar de algún valor para quienes se relacionan con problemas climatológicos de construcción y de «habitat».

La versión que se presenta es muy simple y se ha basado en la parte más elemental de la trigonometría esférica; la resolución de triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros. Se supone en ella que la fachada es plana, vertical y asentada en una llanura horizontal.

Representando el movimiento diurno del Sol sobre la esfera celeste (ver figura 1), el diámetro A A′ será la línea zenit-Nadir; el C C′, el eje de rotación de la Tierra (eje del mundo); E E_1 E′, el plano del Ecuador; H H'_1 H′ H_1, el del horizonte, y B_1 B B'_1 B′, el plano en que se mueve el Sol sobre dicha esfera con velocidad angular constante y cuando su decli-

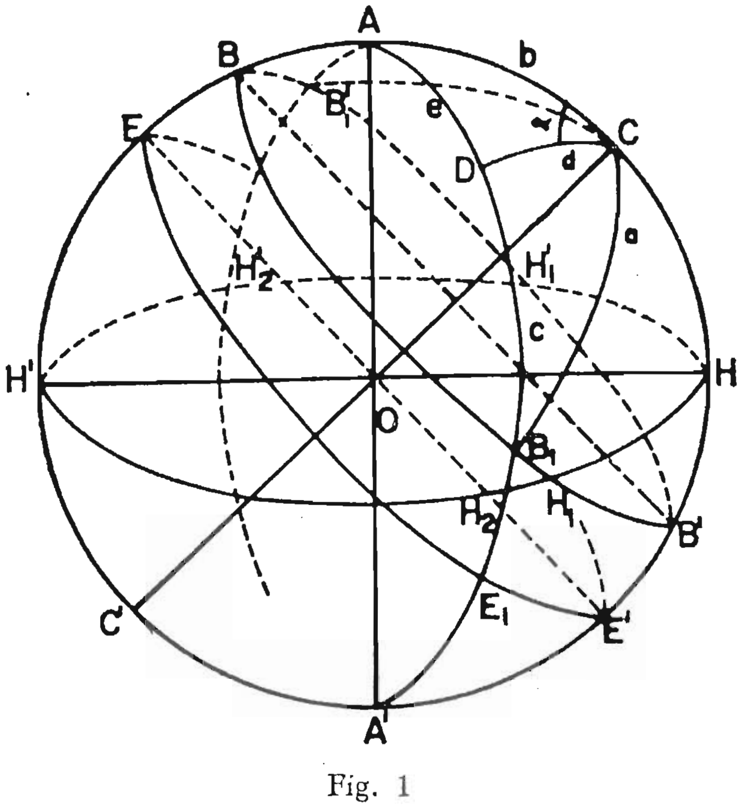


Fig. 1

nación es δ = B O E. Sea A D B_1 E_1 A' B'_1 la intersección del plano de la fachada con la esfera celeste. Este plano forma con el plano meridiano el diedro H' A A' H'_2 = A, cuyo rectilíneo es el ángulo H' O H'_2; este es el azimut del plano de la fachada contado desde el sur en el sentido S W N E o desde el norte en el mismo sentido angular (N E S W). El problema consiste en expresar en tiempo el valor del diedro que forman los semicírculos máximos CB'_1 y C', pues el sol comienza a incidir en la fachada cuando en su movimiento ascendente su trayectoria corta al plano A B_1 A' B'_1 de ésta en el punto B_1 y deja de incidir sobre ella cuando en su movimiento descendente corta al mismo plano en el punto B'_1. Este planteamiento se hace suponiendo que el menor de los diedros H_2 O H y H'_2 O H que el plano de la fachada forma con el plano meridiano, sea mayor que el ángulo H_1 O H = H'_1 O H que los rayos del sol naciente o poniente que se perciben en O forman con la meridiana. En los casos en que no sea así, la solución del problema es también bastante simple como después se verá.

El diedro B_1 C C' B'_1 es uno de los ángulos del triángulo esférico isésceles B_1 C B'_1, el cual mediante el círculo máximo C D C' de plano perpendicular al A B_1 H_2 A' H_2 B'_1 de la fachada, queda dividido en dos triángulos esféricos rectángulos, el C D B_1 y el C D B'_1. El plano C D C' es bisector del diedro B_1 C C' B'_1, por lo que basta calcular uno de los diedros, el D C C' B_1 o el D C C' B'_1 para determinar el B_1 C C' B'_1. Llamando α al valor del diedro que forman el plano meridiano y el C D C''; C_1 al diedro que forman dicho plano meridiano y el C B_1 C', y C_2 al diedro que forman el plano meridiano y el C B'_1 C', y

$$\left\{\begin{array}{lll} a & & \text{al arco de círculo máximo C } B_1 \\ a' & = & a \text{ al arco de círculo máximo C } B'_1 \\ b & & \text{al arco de círculo máximo C A} \\ d & & \text{al arco de círculo máximo C D} \\ c & & \text{al arco de círculo máximo D } B_1 \\ e & & \text{al arco de círculo máximo A D} \end{array}\right.$$

y designando por las mayúsculas que ocupan los vértices, a los valores de los restantes diedros de los triángulos rectángulos A D C y C D B_1, se tiene:

En el triángulo A D C:

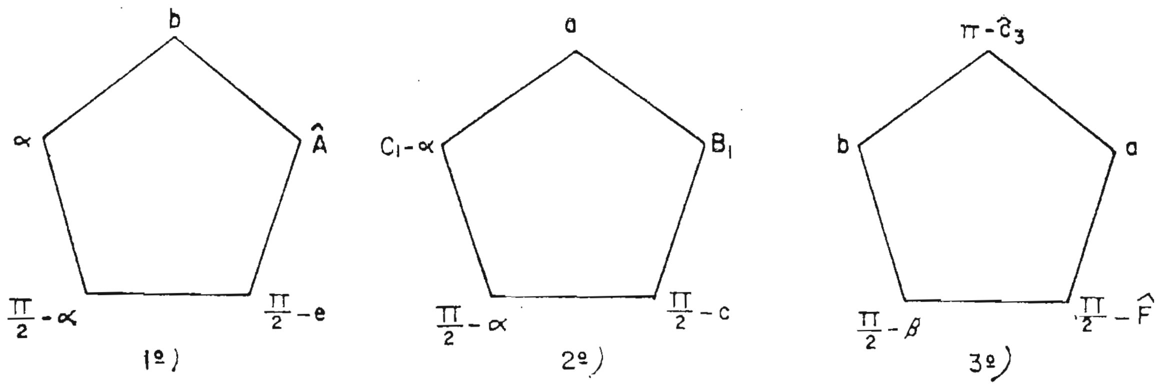
$$\cos b = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} \alpha; \ \operatorname{tag} \alpha = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b} \qquad [1]$$

Pentágono de Neper 1.º)

$$\cos \alpha = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{cotg} b \qquad [2]$$

En el triángulo C D B_1:

$$\cos (C_1 - \alpha) = \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - d \right) \qquad [3]$$



Pentágono de Neper 2.º)

$$\text{Eliminando cotg} \left(\frac{\pi}{2} - d \right) \text{ entre} \qquad [2] \text{ y } [3]$$

$$\cos (C_1 - \alpha) = \cos (C_2 + \alpha) = \text{cotg } a \text{ tang } b \cos \alpha$$

Puesto que:

$$a = \frac{\pi}{2} - \delta \; ; \; b = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

con δ = declinación del sol para el día en que se efectúa el cálculo y λ = latitud del lugar, es preciso comenzar por determinar el valor del parámetro auxiliar α por la fórmula [1], que equivale a:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\text{cotg A}}{\text{sen } \lambda} \qquad [5]$$

y llevar este valor a la [4] que equivale a

$$\cos (\overline{C_1} - \alpha) = \cos (\overline{C_2} + \alpha) = \text{tang } \delta \text{ cotg } \lambda \cos \alpha \qquad [6]$$

Obtenido del [6] el valor de:

$$C_1 - \alpha = C_2 + \alpha$$

expresado en grados, el tiempo t de insolación será:

$$t = \frac{C_1 + C_2}{15} = \frac{2 (C_1 - \alpha)}{15} \quad [7], \text{ expresado en horas.}$$

En esta determinación se ha supuesto que el menor de los diedros que la fachada forma con el plano meridiano (cuyos rectilíneos son H_2 O H y H'_2 O H) es mayor que el ángulo β = H_1 O H = H'_1 O H que forman con la meridiana O H los rayos del sol naciente o poniente que llegan a O.

Este ángulo β es fácil de determinar conocidos λ y δ, a partir del triángulo rectilátero A C H_1. Llamando en este β al diedro en A = H_1 O H, C_2 al diedro en C y F al diedro en H_1, el pentágono de Neper 3.º) nos da:

$$\cos \alpha = \text{sen } b \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \text{sen } b \cos \beta$$

y de aquí:

$$\cos \beta = \frac{\cos a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \delta}{\cos \lambda} \qquad [9]$$

En el caso que β resulte tal que alguno de los ángulos H_2 O H o H'_2 O H de la fachada con la meridiana fuese menor que β, por ejemplo, el H_2 O H se calcularía el ángulo C_2 correspondiente a la insolación de la fachada, a partir del mediodía en adelante por las fórmulas [5] y [6] y el C_3, correspondiente a la insolación desde la salida por el horizonte hasta el mediodía, por la fórmula:

$$\cos (\pi - C_3) = \text{cotg } a \text{ cotg } b = \text{tang } \delta \text{ tang } \lambda \qquad [10]$$

deducida del pentágono de Neper [8] anterior y t sería:

$$t = \frac{C_1 + C_3}{15}$$

Si ambos ángulos H_2 O H y H'_2 O H fuesen menores que β, el tiempo de insolación de la fachada es igual al de duración del sol sobre el horizonte, que vale:

$$t = \frac{2\, C_3}{15}$$

en cuyo caso C_3 se calcula por la fórmula [10].

En todos los casos, es preciso disponer del valor de λ (latitud del lugar) y de δ (declinación del sol), dato este último que varía desde 23º 27′ aproximadamente, que alcanza cuando tiene su máximo valor positivo hacia el 21 de junio (solsticio de verano) hasta —23º —27′ a que alcanza su máximo valor negativo hacia el 22 de diciembre (solsticio de invierno), pasando por el valor O en los equinoccios de otoño (hacia el 21 de septiembre) y primavera (hacia el 21 de marzo). En cuanto precede, se ha supuesto que la cara de la fachada está orientada al sur. Quedan al ingenio del lector las correspondientes determinaciones angulares, caso de que la cara de la fachada mirase a otra dirección.

RESOLUCION GRAFICA

El problema anterior admite siempre una sencilla solución gráfica basada en la construcción del rectilineo del diedro B_1 CC' B'_1 de la figura 1 sobre el círculo menor B B'_1 B' B_1 de la trayectoria diurna del sol, o del rectilineo del diedro H_1 C C' B'_1 de la figura 2 sobre el mismo círculo menor, si, como ocurre en el caso expuesto en esta segunda figura, la semirecta O H_2 de la intersección de la fachada con el plano del horizonte queda dentro del ángulo H_1 O H'_1 formado por los rayos de sol que en su salida y puesta llegan a O. Por esta última circunstancia, se desarrolla la construcción para este segundo caso, en apariencia más complejo.

La proyección vertical del círculo menor B B'_1 H'_1 B' H_1 sobre el plano del horizonte H H_2 H_1 H' H'_1 es la elipse H_1 B_2 B_3 H'_1 B_4, siendo B_2 la proyección de B y B_4 la de B' (figura 2). Los puntos H_1 y H'_1 son proyección

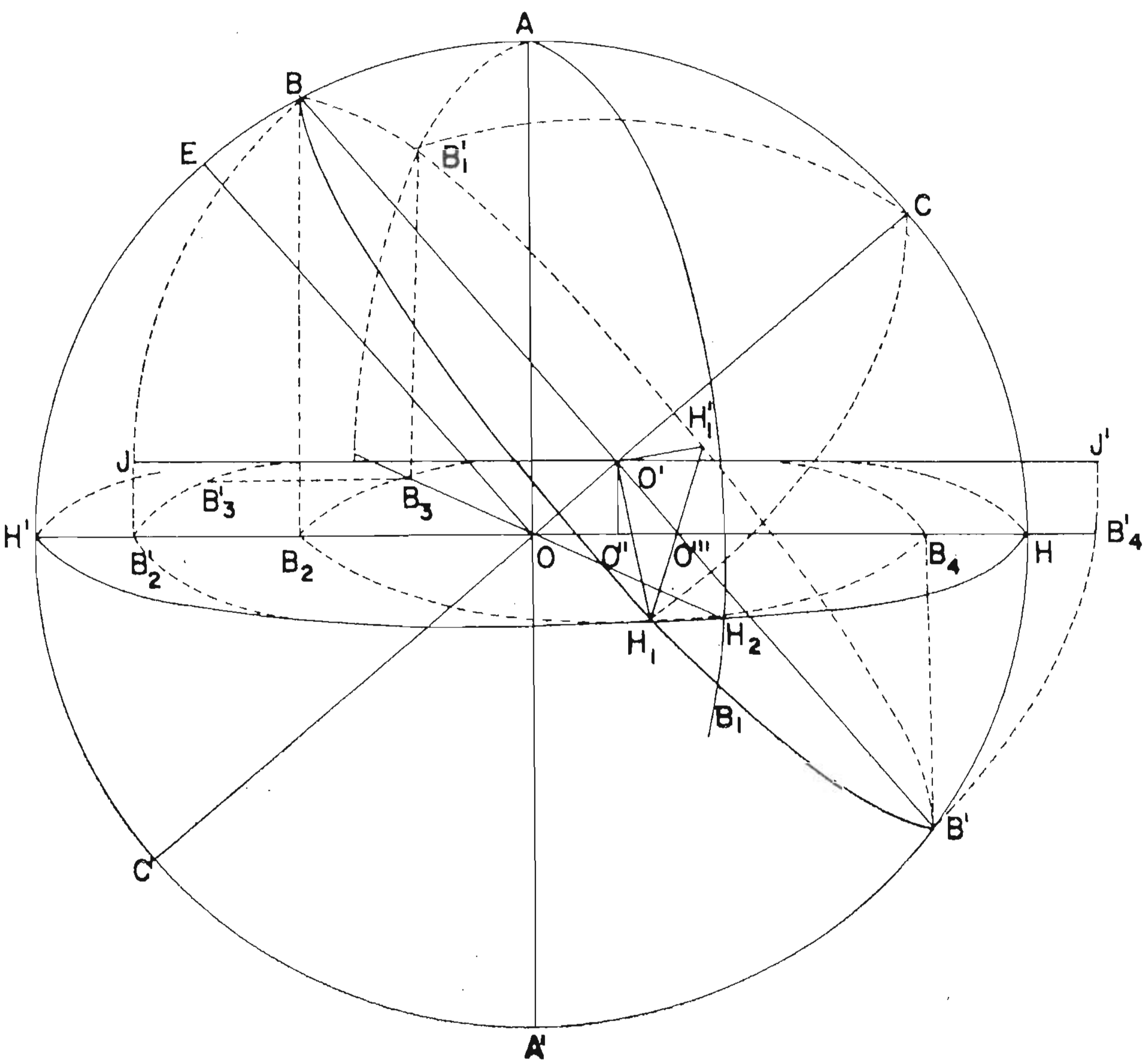


Fig. 2

de sí mismos, y la elipse citada será tangente en ellos al círculo máximo que representa al horizonte. Abatiendo el referido círculo menor B B′ H′ B′ B_1 H_1 alrededor de un eje perpendicular al plano meridiano A H A′ H′ que pase por el centro O′ hasta quedar dicho círculo menor paralelo al horizonte con su diámetro B B′ en la posición J J_1, y proyectándolo luego sobre el plano del horizonte, se obtiene este círculo menor dibujado sobre el plano del horizonte en la posición B'_2 B'_3 B'_4, correspondiendo estos tres puntos antes citados a los B B'_1 B′. Este círculo así dibujado y la elipse antes citada son figuras afines. El eje mayor de la elipse es igual al radio del círculo y el eje menor es igual a dicho radio multiplicado por el $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \operatorname{sen} \lambda$. Los puntos B_2 y B'_2 B_3 y B'_3 y B_4 B'_4 de ambas figuras se corresponden en la afinidad. En la lámina 3, hecho con la misma notación, ambas figuras están dibujadas sobre el plano del horizonte y en la lámina 4 se ha representado una construcción auxiliar para hacer el abatimiento y la proyección,

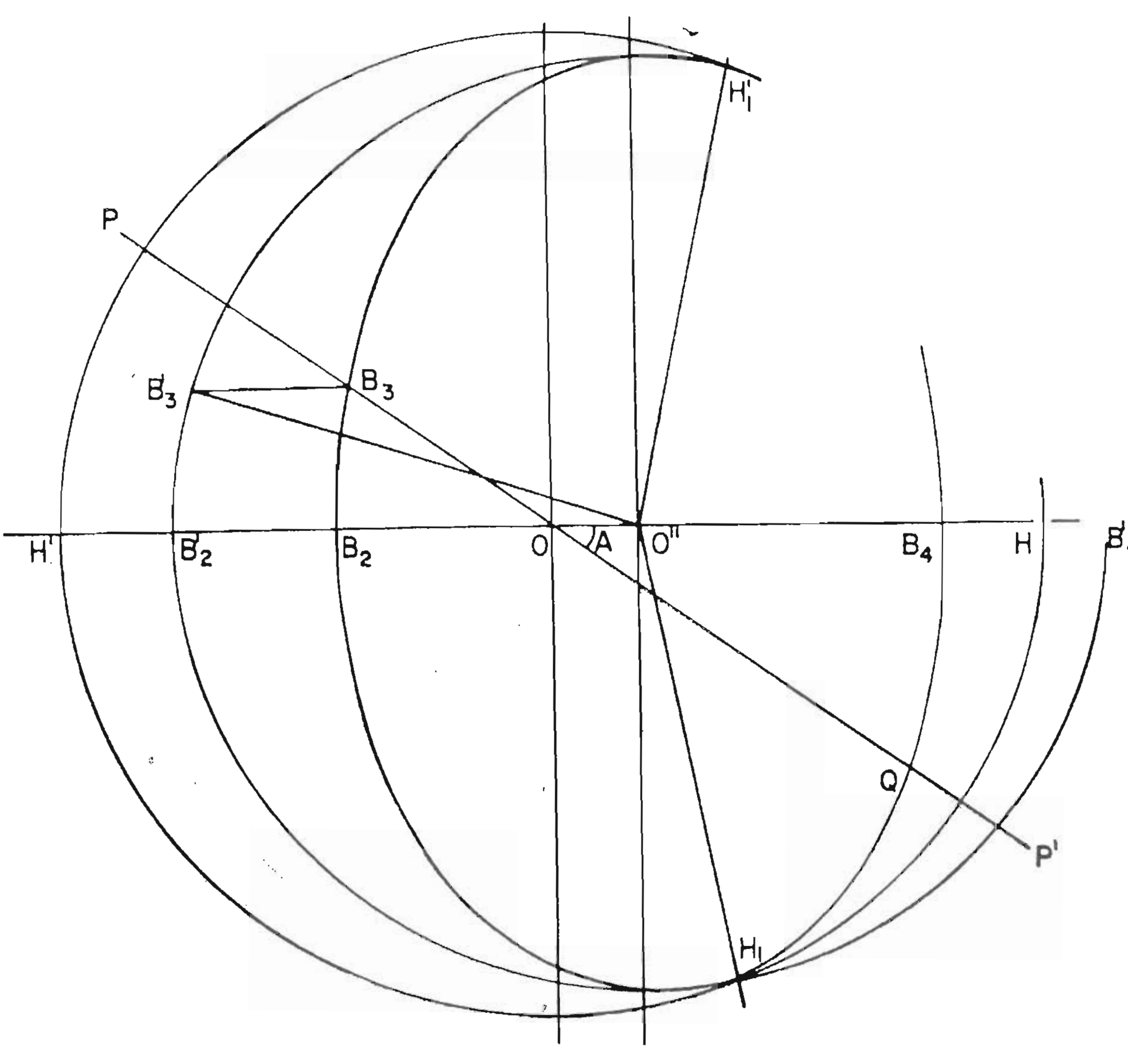


Fig. 3

empleándose la misma referencia para los puntos comunes a los gráficos 2, 3 y 4. Los elementos de esta última construcción, en la que $\lambda = 40^{\circ}$, $\delta \cong 13$ grados, son:

Sobre uno de los lados del ángulo L O N $= \dfrac{\pi}{2} + \lambda$ se toma una longitud arbitraria O L que representará el radio del círculo menor que describe el sol sobre la esfera celeste. La intersección O′ de O O′, normal a O L en O, y L O′ que forma con O L un ángulo δ, da L O′ radio de la esfera celeste y O O′ distancia del centro de dicha esfera al centro del círculo menor, pues O′ L $\cos\delta$ = O L y además O′ L $\operatorname{sen}\delta$ = O O′. Trazando por O′ una paralela a O L, su intersección con O N da O‴ con O′ O‴ distancia del centro del repetido círculo menor a la recta H_1 H'_1. Y la proyección de O′ sobre O N es O″. La distancia al centro de la esfera celeste del centro común de la elipse en que se proyecta el círculo menor y de la reproducción del mismo al abatirlo y proyectarlo después sobre el plano del horizonte en la forma antes indicada, es O O″. O L será el eje mayor de la elipse y L M = O L $\operatorname{sen}\lambda$ el eje menor (con O M normal a O N y L M paralela a O N) y, por último, trazando con centro de O‴ un arco con radio O L corta a O O′ en

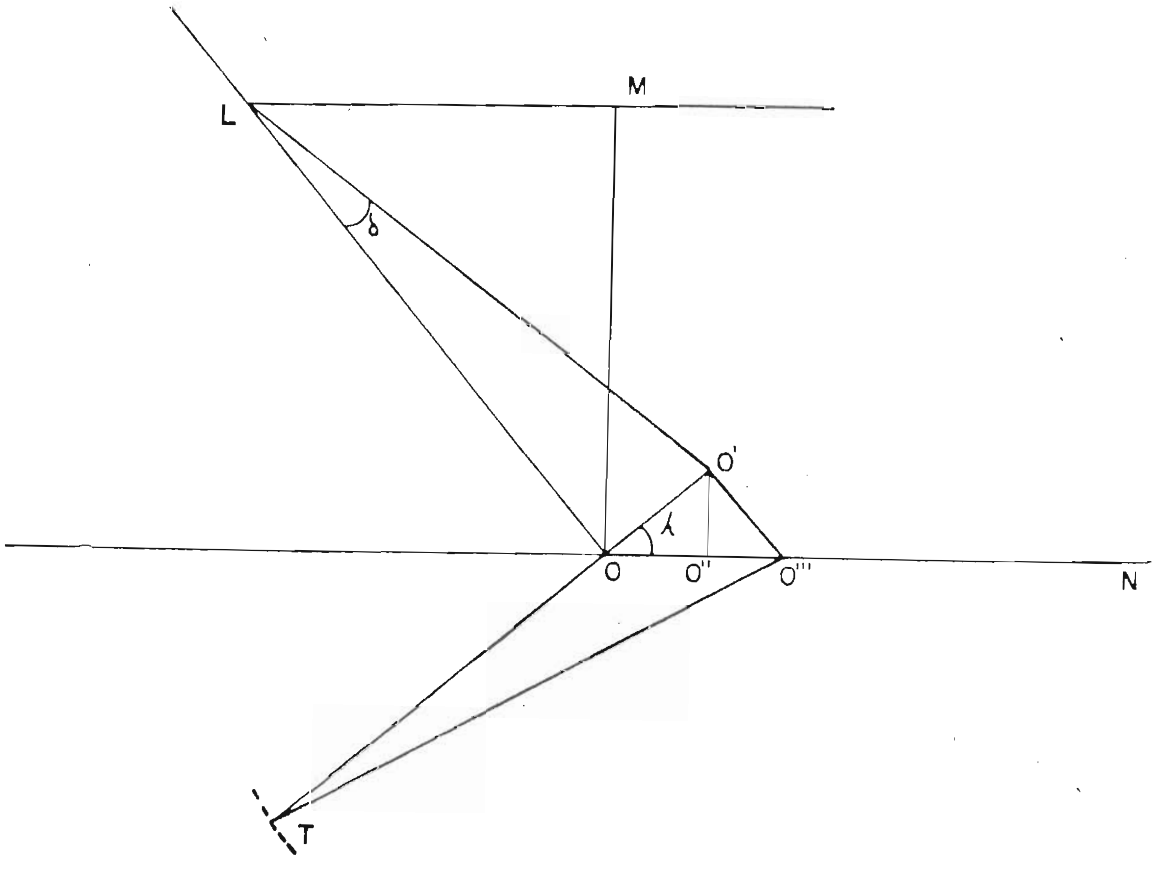


Fig. 4

T, de forma que el ángulo $O' \ O''' \ T = \pi - C_3$ es el rectilineo del diedro $H_1 \ C \ C' \ B'$, pues como se ve la figura 2:

$$\cos (\pi - C_3) = \cos O''' \ O' \ H'_1 = \frac{O' \ O'''}{O' \ H'_1} = \frac{O' \ O'''}{OL}$$

Con los elementos así determinados en la figura 3 se dibujan el plano del horizonte $H' \ H_1 \ H \ H'_1$, el abatimiento citado de la trayectoria del sol (círculo $B'_2 \ B'_3 \ B'_4$) y la elipse, proyección de la misma $B_2 \ B_3 \ H'_1 \ B_4 \ H_1$. En los puntos $H_1 \ H'_1$ deben ser tangentes la elipse y el plano del horizonte, además de coincidir el ángulo $H_1 \ O'' \ H = \pi - C_3$ con el determinado en la figura 4.

Seguidamente se traza $P \ P'$, tal que $H' \ O \ P = A$, ángulo de la fachada con la meridiana. Esta cortará a la elipse en B_3 y Q. $B_3 \ B'_3$, paralela a $H \ H'$, corta al círculo menor abatido en B'_3. $B'_3 \ O''$ es uno de los lados del ángulo solución. El otro lado es, en este caso, $O'' \ H_1$, pues el sol comienza a dar en la fachada en el momento de su salida por H_1. Si x es el valor en grados del ángulo $H_1 \ O'' \ B'_3$ $\quad t = \frac{x}{15}$ es el tiempo de insolación de la fachada.